

Amélioration des performances d'imagerie d'un télescope multi pupilles par Diversité de Phase temps-réel

Isabelle MOCŒUR, Laurent MUGNIER, Frédéric CASSAING

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
29, Avenue de la Division Leclerc - BP 72
92322 Châtillon CEDEX, France

Isabelle.Mocoeur@onera.fr, Frederic.Cassaing@onera.fr, Laurent.Mugnier@onera.fr

Résumé – La mise en phase d'un instrument multi télescopes nécessite la mesure des aberrations différentielles de piston et de basculement entre les pupilles (opération dite "de cophasage"). Or, les algorithmes classiques de type Diversité de Phase qui permettent de cophaser sur objet étendu sont itératifs et ne permettent donc pas d'effectuer les mesures en temps-réel. Un estimateur rapide peut être obtenu dans l'hypothèse des faibles phases aberrantes, afin d'approximer le critère à minimiser comme étant quadratique et ainsi obtenir une estimée analytique de la phase recherchée. Nous présentons ici ce nouvel estimateur, et nous comparons ses performances à celles de l'algorithme itératif.

Abstract – Multi-telescope interferometers require a very accurate control of the optical paths, especially the differential piston and tip/tilt aberrations between apertures (so-called "cophasing" operation mode). Several Phase Diversity algorithms have been developed for unknown objects; however, they are iterative, and consequently time-consuming. Here we present an estimator which can be used in closed-loop in the case of small phase perturbations. Under this assumption, a quadratic criterion can be derived, which allows to express the solution under a simple analytical form. The performance of both estimators, iterative and analytic, is also compared.

1 Position du problème

Les missions spatiales pour l'astronomie ou l'observation de la Terre nécessitent des résolutions spatiales importantes, ce qui implique le développement de télescopes de plus en plus grands. Pour obtenir de telles résolutions tout en s'affranchissant des contraintes de lancement, l'interférométrie multi-pupilles apparaît comme une solution séduisante. Cependant, l'une des principales difficultés de cette méthode est le cophasage des télescopes, c'est-à-dire la mesure et la correction à une fraction de longueur d'onde des aberrations spécifiques que sont les différences de marche (piston) et les basculements différentiels (tip/tilt) de l'instrument synthétisé (voir figure 1).

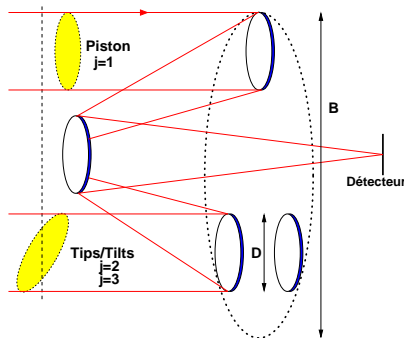


FIG. 1 – Instrument multi télescopes à trois sous-pupilles et ses aberrations différentielles.

Plusieurs travaux menés notamment à l'ONERA ont

montré que la solution la mieux adaptée au cophasage multi télescopes était un capteur plan focal [1]. En effet, cette méthode permet la mesure de tous les modes d'intérêt ainsi que la recombinaison de toutes les sous-pupilles en une seule trame, et ce avec un design optomécanique simple. Mais, si l'objet est résolu, la seule donnée de l'image focale est insuffisante pour retrouver sans ambiguïté les aberrations [2]. L'une des rares solutions alors mise en œuvre est la Diversité de Phase, introduite en optique par Gonsalves [3, 4]; cependant, les méthodes d'estimation associées requièrent des temps de calcul importants.

L'objet de cette communication est de présenter le développement d'un algorithme analytique compatible avec les exigences d'un système de cophasage temps-réel. Pour cela, nous proposons un nouveau critère d'estimation qui est quadratique et qui permet donc l'expression des aberrations de manière simple. Nous présentons également les résultats de simulation en piston et nous comparons les performances de notre estimateur analytique à celles de l'estimateur itératif.

2 La diversité de phase

2.1 Formation des images

Considérons un instrument composé de N_T pupilles circulaires n de rayon R_n placées à la position \mathbf{u}_n . La trans-

mission complexe p de la pupille globale s'exprime comme :

$$p = \sum_{n=1}^{N_T} p_n \star \delta_{\mathbf{u}_n} \quad (1)$$

La phase aberrante ϕ est décomposée sur chaque sous-pupilles dans une base de modes; par exemple, en se plaçant dans la base des polynômes de Zernike, la transmission complexe de la $n^{\text{ième}}$ pupille s'écrit :

$$p_n\left(\frac{\mathbf{r}}{R_n}\right) = \Pi \exp \left[j \sum_{k=1}^{k_{\max}} a_{kn} Z_k\left(\frac{\mathbf{r}}{R_n}\right) \right] \quad (2)$$

$$(3)$$

$$\text{avec } \phi = \{a_{kn}\}_{\substack{k \in \{1,2,3\} \\ n \in \{1, \dots, N_T\}}} \quad (4)$$

où $j^2 = -1$ et où a_{kn} est l'amplitude RMS de la $k^{\text{ième}}$ aberration sur la pupille n ; comme nous nous intéressons seulement au mode piston ($k = 1$) et tip/tilt ($k = 2, 3$), nous considérerons par la suite que $k_{\max} = 3$. En notant TF l'opération Transformée de Fourier, la réponse impulsionnelle h de l'instrument est :

$$h = \left| \text{TF}^{-1}(p) \right|^2 \quad (5)$$

Au plan focal, l'image \mathbf{i} observée est modélisée par la convolution discrète et bruitée de \mathbf{h} avec l'objet observé \mathbf{o} :

$$\mathbf{i}(\mathbf{o}, \phi) = \mathbf{h}(\phi) \star \mathbf{o} + \mathbf{b} \quad (6)$$

où \mathbf{b} est un bruit blanc Gaussien stationnaire. Par la suite, nous noterons $\tilde{\mathbf{h}}$ la Transformée de Fourier rapide (FFT) de \mathbf{h} ; $\tilde{\mathbf{h}}$ sera communément appelée Fonction de Transfert Optique (FTO).

Dans le cadre d'un cophasage sur objet étendu, la simple donnée de l'image focale est insuffisante pour retrouver conjointement et sans ambiguïté l'objet ainsi que les aberrations. Ce problème peut être résolu par la méthode de la Diversité de Phase, qui consiste à analyser plusieurs images obtenues au voisinage du foyer en présence d'une modulation de phase ϕ_d parfaitement connue (souvent une défocalisation de par sa simplicité de mise en oeuvre). Nous considérons ici deux images \mathbf{i}_1 et \mathbf{i}_2 : la première est acquise au plan focal, et la deuxième dans un plan défocalisé d'une quantité d . Les réponses impulsionnelles sont alors liées par :

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}(\phi) \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}(\phi + \phi_d) \quad (7)$$

2.2 Inversion du problème

L'estimation de la phase aberrante ϕ , voire de l'objet, est basée sur une approche de type moindres-carrés qui consiste à choisir l'objet et la phase qui maximisent la densité de probabilité jointe des données. Or, maximiser cette densité de probabilité revient à minimiser J , la distance aux images \mathbf{i}_1 et \mathbf{i}_2 , qui peut s'exprimer dans le domaine de Fourier discret comme :

$$J(\mathbf{o}, \phi) = N^2 \ln \sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu} \left| \tilde{\mathbf{i}}_1(\nu) - \tilde{\mathbf{h}}_1(\phi, \nu) \tilde{\mathbf{o}}(\nu) \right|^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu} \left| \tilde{\mathbf{i}}_2(\nu) - \tilde{\mathbf{h}}_2(\phi, \nu) \tilde{\mathbf{o}}(\nu) \right|^2 + \text{Reg} \quad (8)$$

où N^2 est le nombre de pixels dans l'image, σ l'écart-type du bruit (supposé le même pour les deux images) et Reg un terme servant à introduire d'éventuelles connaissances *a priori* sur les grandeurs recherchées.

Bien que l'objet soit inconnu, il est possible de l'exprimer à phase aberrante fixée :

$$\tilde{\mathbf{o}} = \frac{\tilde{\mathbf{i}}_1(\nu) \tilde{\mathbf{h}}_1^*(\phi, \nu) + \tilde{\mathbf{i}}_2(\nu) \tilde{\mathbf{h}}_2^*(\phi, \nu)}{|\tilde{\mathbf{h}}_1(\phi, \nu)|^2 + |\tilde{\mathbf{h}}_2(\phi, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} \quad (9)$$

où l'opérateur $*$ désigne le complexe conjugué. En introduisant l'estimée $\hat{\mathbf{o}}(\phi)$ dans l'équation (8), nous obtenons un nouveau critère $J_{\mathcal{I}}$ qui ne dépend plus explicitement que de la phase :

$$J_{\mathcal{I}}(\phi) = \sum_{\nu} \frac{1}{2} \frac{\left| \tilde{\mathbf{i}}_1(\nu) \tilde{\mathbf{h}}_2(\phi, \nu) - \tilde{\mathbf{i}}_2(\nu) \tilde{\mathbf{h}}_1(\phi, \nu) \right|^2}{\sigma^2 \left[|\tilde{\mathbf{h}}_1(\phi, \nu)|^2 + |\tilde{\mathbf{h}}_2(\phi, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)} \right]} + N^2 \ln \sigma^2 + \text{Reg} \quad (10)$$

avec S_o la densité spectrale de puissance de l'objet. $J_{\mathcal{I}}$ est généralement minimisé itérativement, par exemple par une méthode de type gradient conjugué. Bien que ce critère soit de type myope donc *a priori* susceptible de présenter des minima locaux, des travaux récents ont montré, en ré-interprétant ce critère comme étant à minimum de contraste [5], qu'il avait de bonnes propriétés statistiques. Cependant, les coûts de calcul sont importants : si \mathcal{N} est le nombre d'images acquise par diversité (ici, $\mathcal{N} = 2$), $2\mathcal{N}$ transformées de Fourier sont effectuées par itération, sachant qu'une cinquantaine d'itérations sont nécessaires en pratique.

3 L'estimateur analytique

3.1 Nouvelle définition du critère

Afin d'obtenir un algorithme de type Diversité de Phase qui soit compatible avec les exigences d'un système de cophasage temps-réel, nous nous plaçons dans l'hypothèse des faibles phases aberrantes, qui a déjà été utilisée avec succès pour le développement d'un algorithme analytique de cophasage sur point source en plan focal [6]. Dans le cadre de cette hypothèse, il devient alors possible de :

- considérer le dénominateur de l'équation (10) comme un terme de pondération en l'approximant par sa valeur à $\phi = 0$,
- linéariser l'expression des pics de la FTO dans chaque plan image, ce qui permet d'obtenir une relation affine de \mathbf{h}_1 et de \mathbf{h}_2 en fonction de ϕ .

Au vu de ces deux simplifications, nous obtenons une nouvelle expression du critère qui est quadratique :

$$J_{\mathcal{I}\mathcal{I}}(\phi) = \left[\mathbf{A}\phi - \mathbf{B} \right]^H \left[\mathbf{A}\phi - \mathbf{B} \right] \quad (11)$$

$$= \phi^T \mathbf{A}^H \mathbf{A} \phi - 2\phi^T \mathbf{A}^H \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (12)$$

3.2 Restauration

3.2.1 Estimation de la phase

L'annulation du gradient de $J_{\mathcal{I}\mathcal{I}}(\phi)$ conduit à une équation linéaire en ϕ . L'expression des aberrations qui en dé-

coule est donnée par :

$$\hat{\phi} = \Re \left\{ \mathbf{A}^H \mathbf{A} \right\}^{-1} \Re \left\{ \mathbf{A}^H \mathbf{B} \right\} \quad (13)$$

où \Re désigne l'opérateur partie réelle. Avec ce nouvel estimateur analytique, le coût de calcul est bien moins important que dans le cas itératif. En effet, il se résume seulement au temps nécessaire pour calculer les transformées de Fourier des \mathcal{N} images de diversité. Quand à l'inversion de la matrice $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$, elle n'est pas dimensionnante puisque cette matrice est carrée, de largeur $N_z N_T$ avec $N_z = 3$ modes (piston et basculements en x/y), soit $N_z N_T = 9$ pour un instrument à 3 pupilles.

3.2.2 Estimation de l'objet

Jusqu'à présent nous avons vu comment estimer les aberrations. Or, il est également possible de retrouver l'objet : en effet, une fois la faible phase aberrante estimée, nous pouvons la ré-injecter dans l'équation (9). Nous disposons alors d'un algorithme de Diversité de Phase Joint, permettant l'estimation de la phase et de l'objet de manière analytique.

3.3 Simulations numériques

Toutes les simulations présentées dans cette section ont été effectuées pour deux plans de diversité, l'un situé à $d_1 = 0$ radian et l'autre défocalisé de $d_2 = 1$ radian. L'objet utilisé est représentatif d'un scène terrestre ; les images, de taille 256x256 pixels, sont échantillonnées à Shannon et comportent du bruit de photons ainsi que l'équivalent d'un bruit de lecture.

3.3.1 Restauration de la phase aberrante

Afin de tester la validité de notre méthode analytique, nous effectuons plusieurs simulations numériques, et nous comparons les performances obtenues à celles de l'estimateur itératif. Deux types de test sont réalisés, et ce pour une configuration à 3 télescopes :

un test de linéarité, où nous appliquons sur une sous pupille une rampe de piston comprise entre $\pm 2\pi$ en prenant un nombre de photons par image égal à $5 \cdot 10^8$, soit un Rapport Signal à Bruit par pixel de 86 (sachant que nous définissons ici le RSB comme étant le rapport de la valeur moyenne du nombre de photons sur son écart-type),

un test de répétabilité, pour lequel nous considérons des flux différents, allant de $5 \cdot 10^4$ à $5 \cdot 10^9$ photons (soit un RSB allant de 1 à 276) ; pour chaque flux, une centaine de tirages est effectuée.

Les images focales/extrafocales obtenues lorsqu'un piston de 1 radian est appliqué sur une sous-pupille avec un RSB de 86 sont représentées Fig. 2.

La figure 3 présente le piston de la sous-pupille mobile estimé par l'algorithme itératif (en pointillés) et par l'estimateur analytique (les symboles pleins) en fonction de l'aberration de piston incidente. Tout d'abord, nous pouvons noter à $\phi = \pm\pi$ un repliement dû à la dynamique intrinsèque de nos estimateurs, qui est de 2π . Le

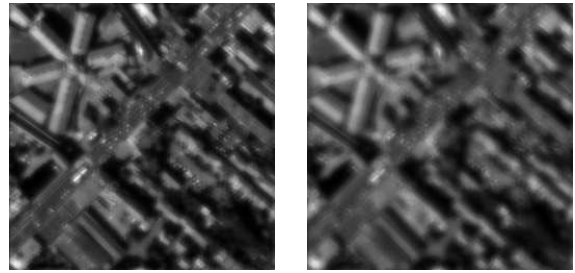


FIG. 2 – Image focale (gauche) et extrafocale (droite) obtenues pour un piston de 1 radian appliqué sur une sous-pupille.

graphe montre également que l'algorithme analytique retrouve parfaitement les aberrations de piston dans le domaine de validité, qui est compris entre ± 2 rad [Mod π].

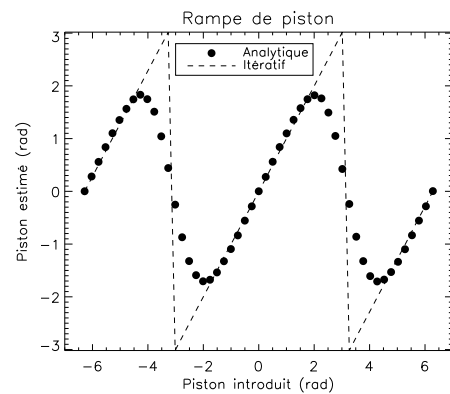


FIG. 3 – Aberrations estimées par l'estimateur analytique et l'estimateur itératif en réponse à l'envoi d'une rampe de piston.

La figure 4 présente la répétabilité en piston en fonction du flux considéré. Pour chaque jeu de données, l'écart-type en piston est tracé en fonction du flux N en photoélectrons reçu par image. A fort flux, le régime de bruit de photons domine et les estimées suivent la loi attendue en $1/\sqrt{N}$; la différence entre les deux estimateurs est quasiment nulle. Au contraire, à faible flux, les estimées se trouvent dominées par le bruit de détecteur. Dans ce cas, l'estimation effectuée par l'algorithme analytique tend vers une constante, tandis que la minimisation itérative du critère diverge due à la présence de minima locaux.

L'ensemble de ces deux résultats, linéarité et répétabilité, démontrent qu'il est possible d'effectuer à l'aide de l'estimateur analytique un cophasage précis pour des coûts de calcul réduits *a minima*.

3.3.2 Restauration de l'objet

L'objet est la grandeur d'intérêt lorsque la Diversité de Phase est utilisée pour faire du traitement d'image *a posteriori*. A. Blanc [2] a mis en évidence que l'estimateur Joint itératif (c.-à.-d. qui permet une estimation conjointe de la phase aberrante et de l'objet de manière itérative)

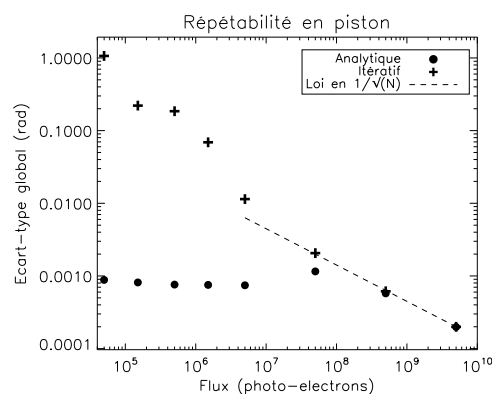


FIG. 4 – Comparaison des performances en piston des deux estimateurs, analytique et itératif, en fonction du flux.

ne permet pas en général d'obtenir une restauration qui soit satisfaisante.

Afin de tester la validité de notre estimateur Joint analytique pour la restauration d'objet, nous utilisons une configuration à 18 télescopes, comme illustrée figure 5 gauche. Nous appliquons un piston de 0.5 radian sur une sous-pupille, et ce pour un RSB de 86 ; l'objet vrai utilisé est illustré figure 5 à droite.

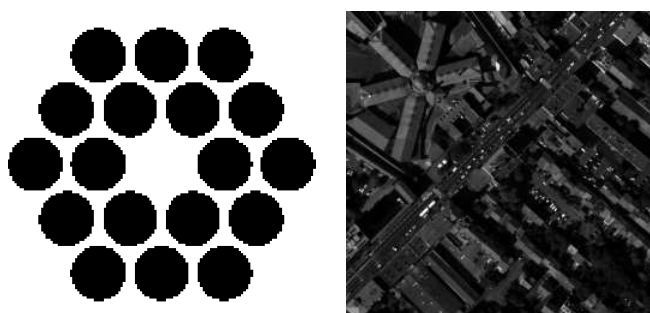


FIG. 5 – Configuration à 18 sous-pupilles et objet vrai utilisé.

L'image focale obtenue est représentée à gauche de la figure 6. A droite se trouve l'objet reconstruit après estimation de la faible phase aberrante. Nous pouvons constater que l'objet estimé est plus proche de l'objet vrai que l'image focale ; le résultat démontre donc qu'en prenant en compte la phase aberrante, il est tout à fait possible de restaurer un objet qui soit très proche de l'objet vrai, et pour des coûts de calcul réduits.

4 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La mesure des aberrations d'un instrument multi pupilles est une opération délicate, notamment sur objet étendu. Les méthodes plan focal dite de Diversité de Phase qui permettent de retrouver la phase aberrante sur objet étendu avec une grande précision apparaissent alors comme des solutions séduisantes. Cependant, les algorithmes correspondants sont des algorithmes itératifs qui demandent

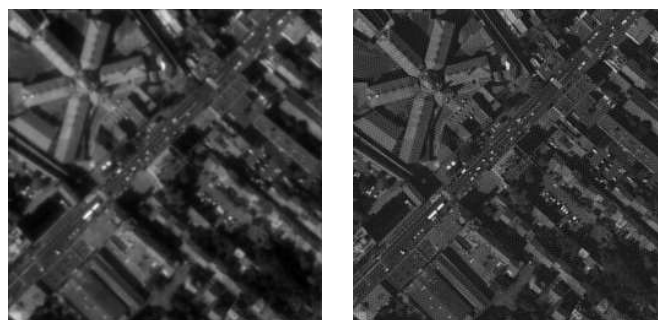


FIG. 6 – Image focale (à gauche) et objet reconstruit (à droite) obtenus à faible bruit et pour un piston de 0.5 rad appliqué sur une sous-pupille.

un coût de calcul important.

Or, pour une utilisation principale appliquée au contrôle en boucle fermée d'un instrument, un algorithme capable de mesurer les faibles aberrations en temps-réel est requis. Nous avons développé un estimateur analytique, donc potentiellement temps-réel, de type Diversité de Phase variable dans l'hypothèse des faibles aberrations, afin d'estimer la phase aberrante avec un temps de calcul réduit *a minima*.

Notre estimateur permet donc non seulement de restaurer la phase, mais aussi l'objet pour des applications d'imagerie : en effet, la prise en compte de la faible phase aberrante dans la déconvolution par la réponse impulsionnelle de l'instrument permet d'obtenir un objet estimé très proche de l'objet vrai.

Par la suite, après avoir caractérisé notre estimateur en fonction de paramètres clés comme le type de scène observée ou le nombre de pupilles utilisées, nous pourrions le valider expérimentalement.

Références

- [1] F. Cassaing, F. Baron et al., "DARWIN Fringe Sensor (DWARF) : Concept Study," dans *Towards Other Earths*, Vol. SP-539, pp. 389-392 (2003).
- [2] A. Blanc, *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apports de la diversité de phase*, Thèse de Doctorat, (Université Paris XI Orsay, France, 2002).
- [3] R. A. Gonsalves, "Phase retrieval and diversity in adaptive optics," *Opt. Eng.* **5** Vol. 21, pp. 829-832 (1982).
- [4] L. M. Mugnier, A. Blanc et al., "Phase Diversity : a Technique for Wave-Front Sensing and for Diffraction-Limited Imaging," in *Advances in Imaging and Electron Physics*, Peter Hawkes ed., Vol. 20, pp. 1-76 (Elsevier, 2006).
- [5] J. Idier, L. Mugnier et al., "Statistical behavior of joint least square estimation in the phase diversity context," *IEEE Trans. Image Processing* **12** Vol. 14, pp. 2107-2116 (2005).
- [6] F. Baron, F. Cassaing et al., "Alignement des pupilles d'un télescope multi-pupilles," dans *19ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images* (2003).