



Problèmes Inverses en Imagerie à Haute Résolution pour l'Astronomie et l'Ophthalmologie

restauration d'images et mesure de front d'onde

Cours 1 : Rappels sur les problèmes inverses

`http://www.onera.fr/dota/`

`Jean-Marc.Conan@onera.fr`

`Laurent.Mugnier@onera.fr,`

Plan du cours

- ❑ **Cours 1 : Rappels sur la résolution de problèmes inverses ;**
- ❑ **Cours 2 : Déconvolution avancée : non gaussienne, myope ;**
- ❑ **Cours 3 : Mesure d'aberrations à partir d'images au voisinage du plan focal ;**
- ❑ **Cours 4 : Mesure d'aberrations pour l'optique adaptative assistée par laser.**

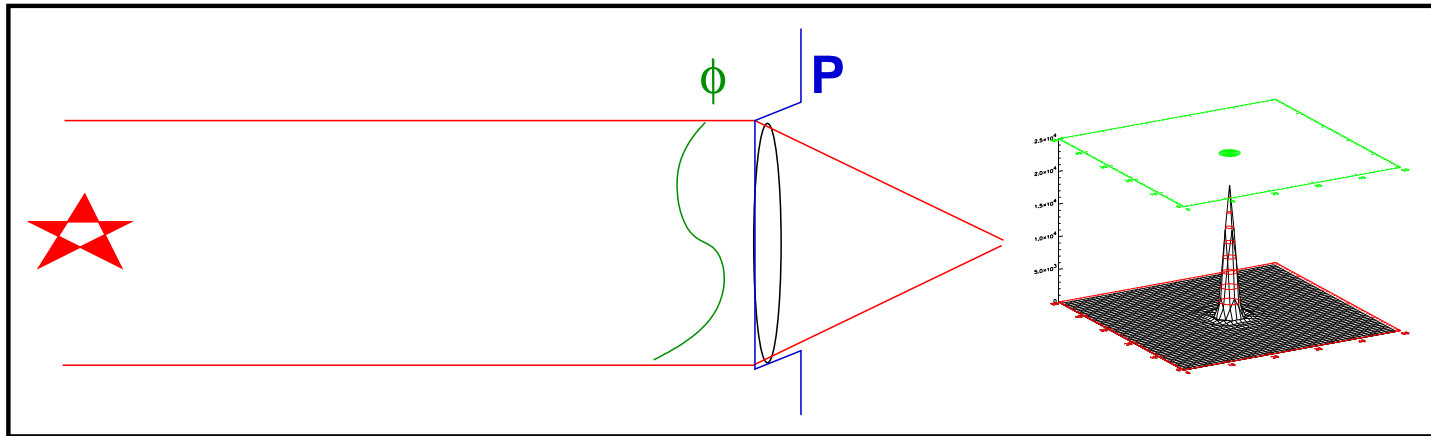
Plan du Cours 1

Aperçu des approches de type "Problèmes Inverses" et illustration en imagerie optique à haute résolution angulaire (astronomie, ophtalmologie...).

- ❑ Rappels sur la formation d'images & la turbulence atmosphérique ;
- ❑ Rappels sur l'analyse de front (ou surface) d'onde (ASO) & et sur l'Optique Adaptative (OA) ;
- ❑ Notion de problème inverse et solution Maximum de Vraisemblance (MV) ;
- ❑ Solution Maximum *A Posteriori* (MAP) et à Ecart Quadratique Moyen Minimum (EQMM) ; lien entre ces estimateurs ;
- ❑ Application à la reconstruction de front d'onde ;
- ❑ Restauration d'image : MV, MAP sous hyp. gaussiennes, lien avec filtre inverse et Wiener

Ingrédients des traitements : modèle de formation des données, modèle de bruit, informations statistiques *a priori* sur la solution.

Diffraction (1)



- ❑ Aberrations \Leftrightarrow phase φ de la surface d'onde ou du front d'onde.
- ❑ Réponse impulsionnelle (ou FEP) :

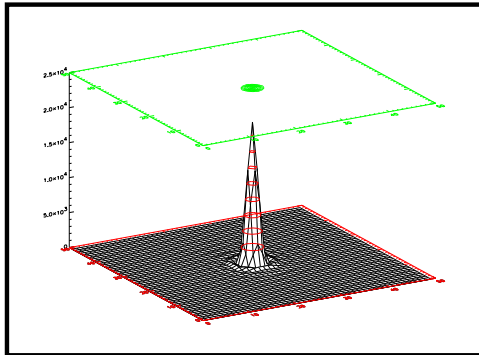
$$h(\theta_x, \theta_y) = \left| \text{TF} \left(P(\lambda u, \lambda v) e^{i\varphi(\lambda u, \lambda v)} \right) \right|^2 (\theta_x, \theta_y)$$

P : indicatrice de la pupille du télescope (diamètre D) ;

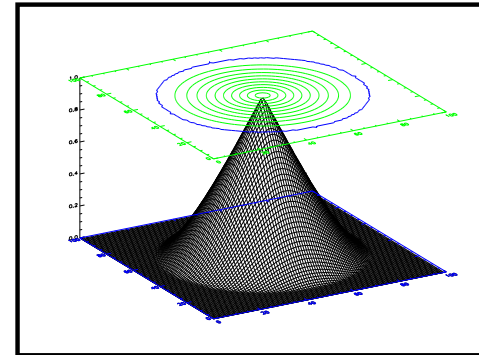
λ : longueur d'onde d'observation ;

(θ_x, θ_y) : position de la source observée (angles sur le ciel, en radians).

Diffraction (2)



FEP



Fonction de transfert

J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

❑ Fonction de transfert $\tilde{h}(u, v) = (P.e^{i\varphi} \otimes P.e^{i\varphi})(\lambda u, \lambda v)$

Fréquence de coupure :

$f_c = D/\lambda$ en l'absence d'aberrations

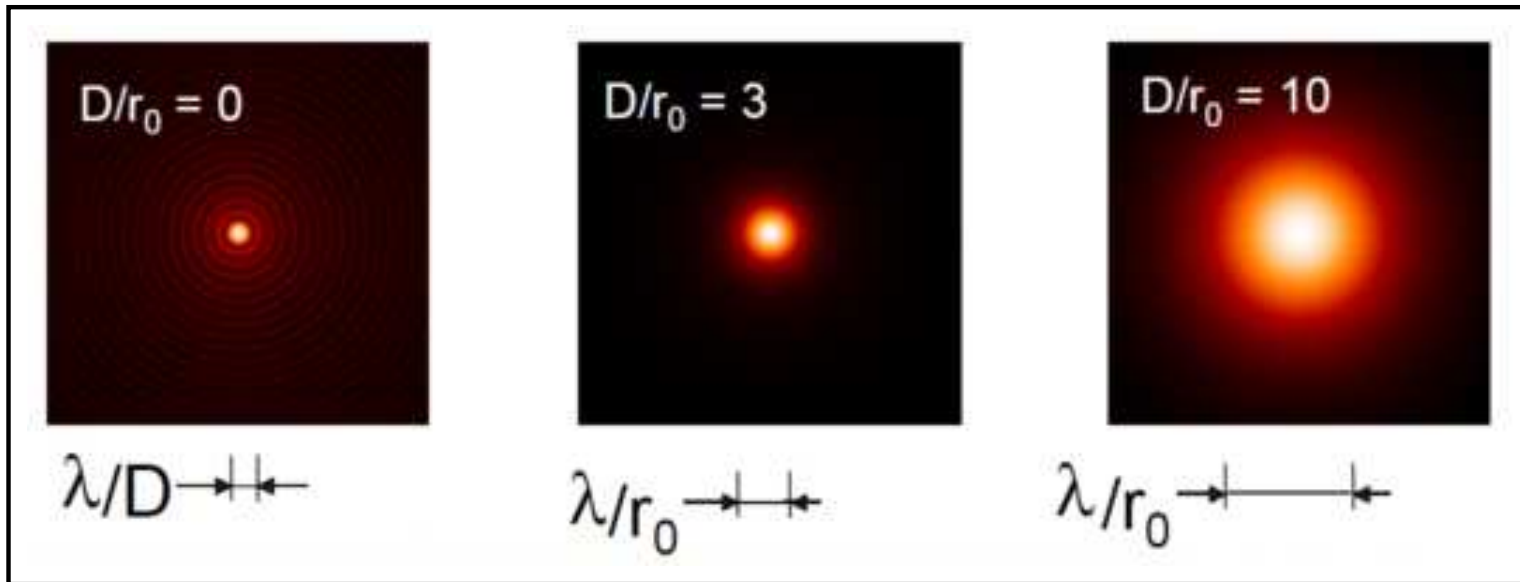
Résolution ultime d'un télescope : λ/D

(\simeq largeur à mi-hauteur de la FEP).

❑ But : voir plus net, voir plus loin (= plus tôt)

$\Rightarrow \nearrow D$ et atteindre la limite de diffraction (puis interférométrie)

Effet de la turbulence sur l'image d'une étoile



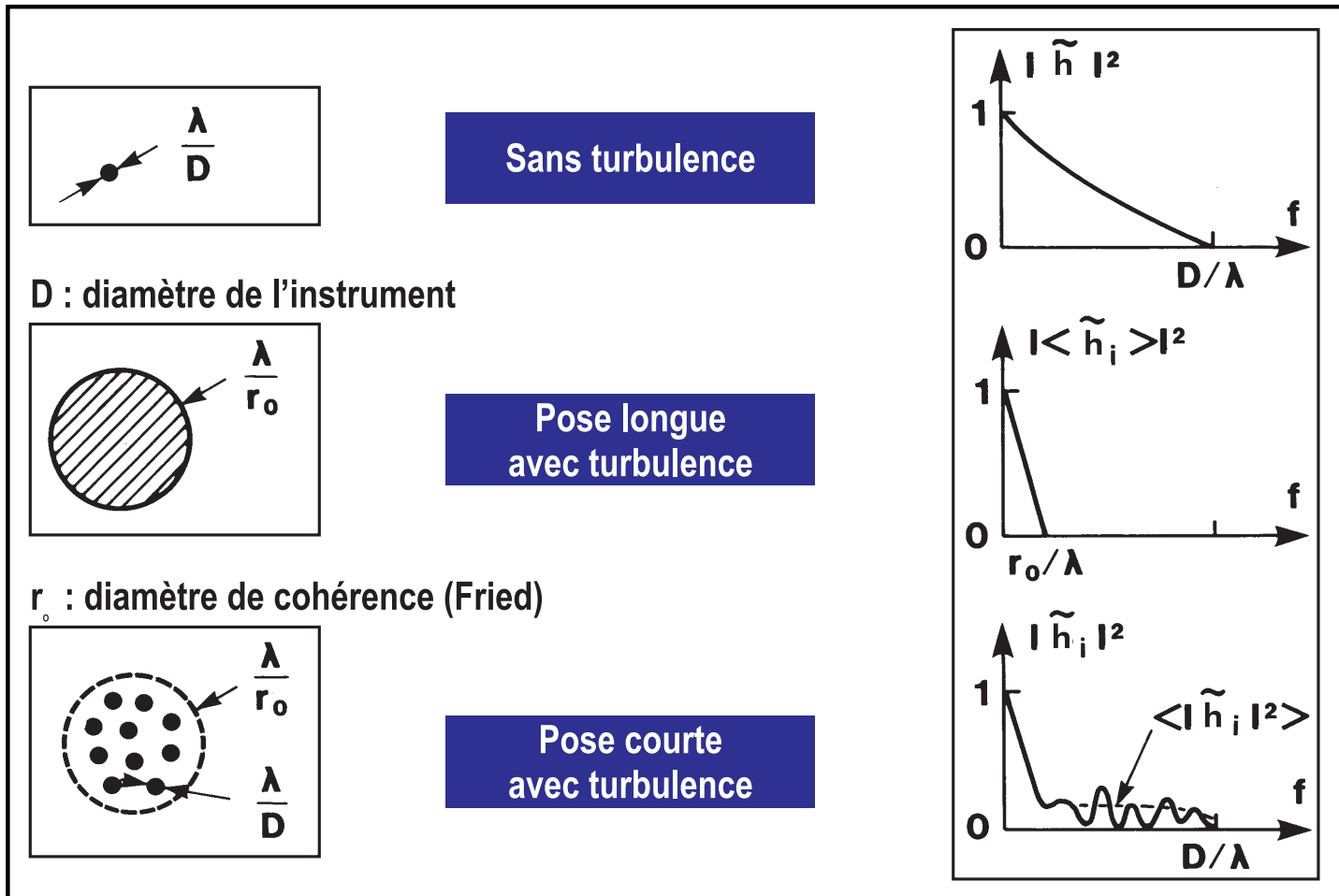
J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

Origine de la turbulence atmosphérique : mvts de masses d'air de T différentes ;

« Force » de la turbulence : diamètre de Fried $r_0 \propto \lambda^{6/5}$; seeing $\lambda/r_0 \propto \lambda^{-1/5}$.

Site astronomique :	λ	r_0	seeing λ/r_0	λ/D pour $D = 10$ m
	0,5 μm ,	10 cm,	1 arcsec	0,010 arcsec
	2,2 μm ,	60 cm,	0,76 arcsec	0,045 arcsec

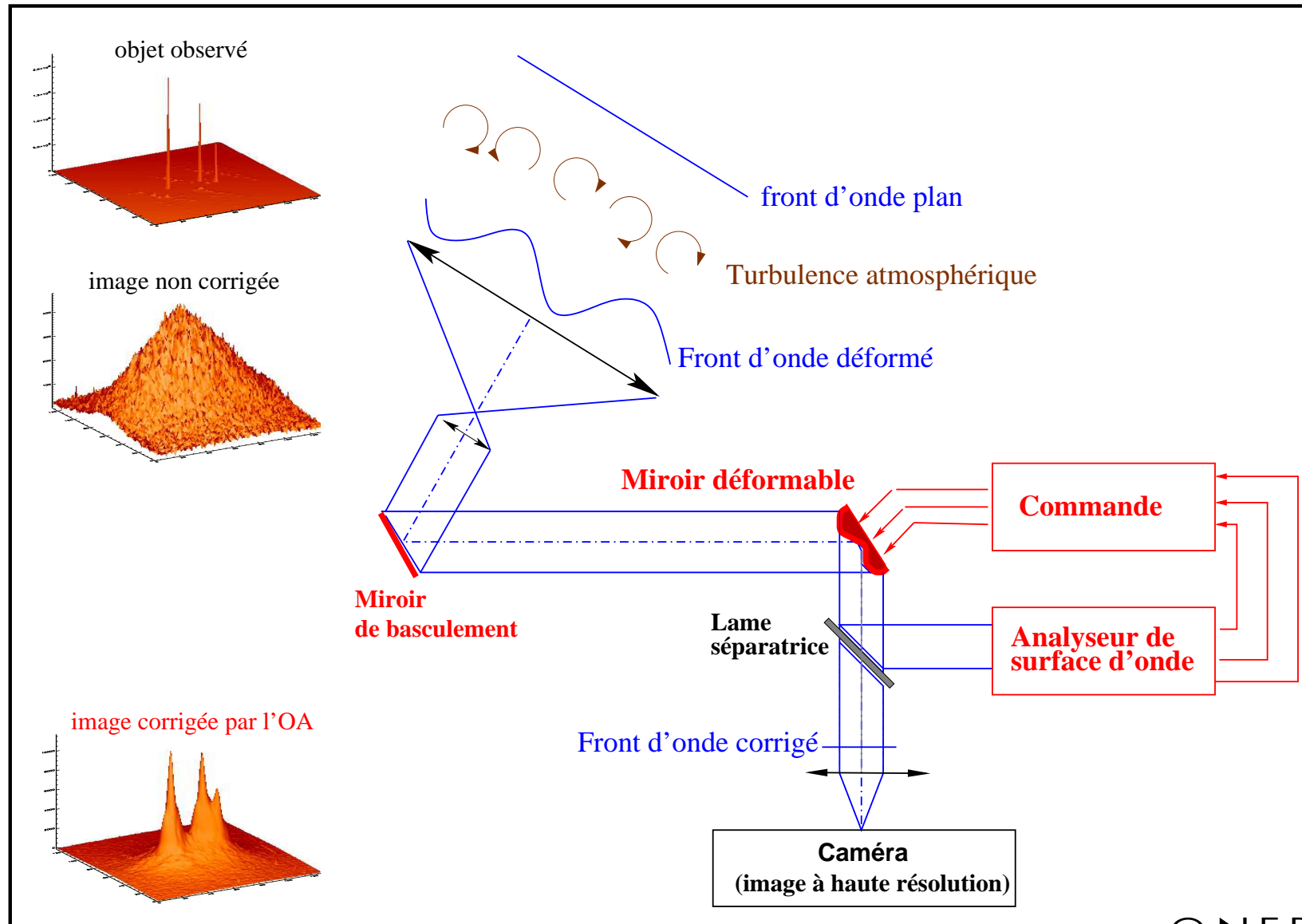
Effet de la turbulence sur la formation des images



J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

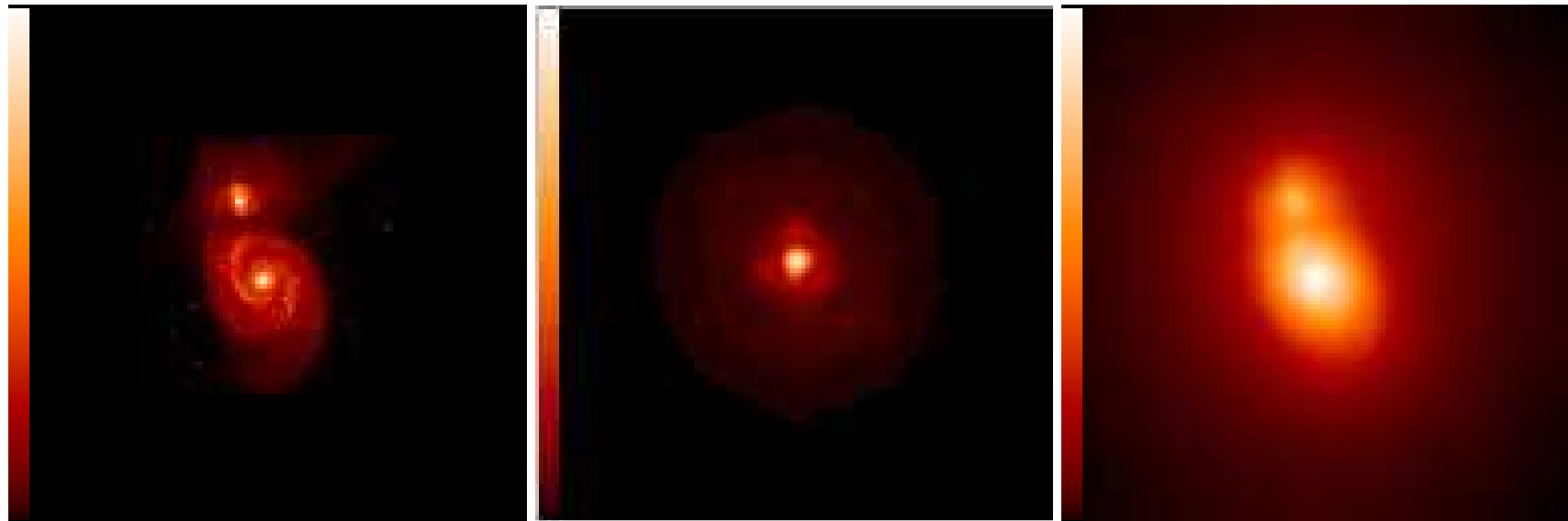
- ❑ Longue pose : fréquence de coupure r_0/λ
- ❑ Imagerie HR : images courtes poses + mesures des aberrations ou correction temps réel et image longue pose.

Principe de l'optique adaptative



J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

Simulation d'image longue pose corrigée par OA



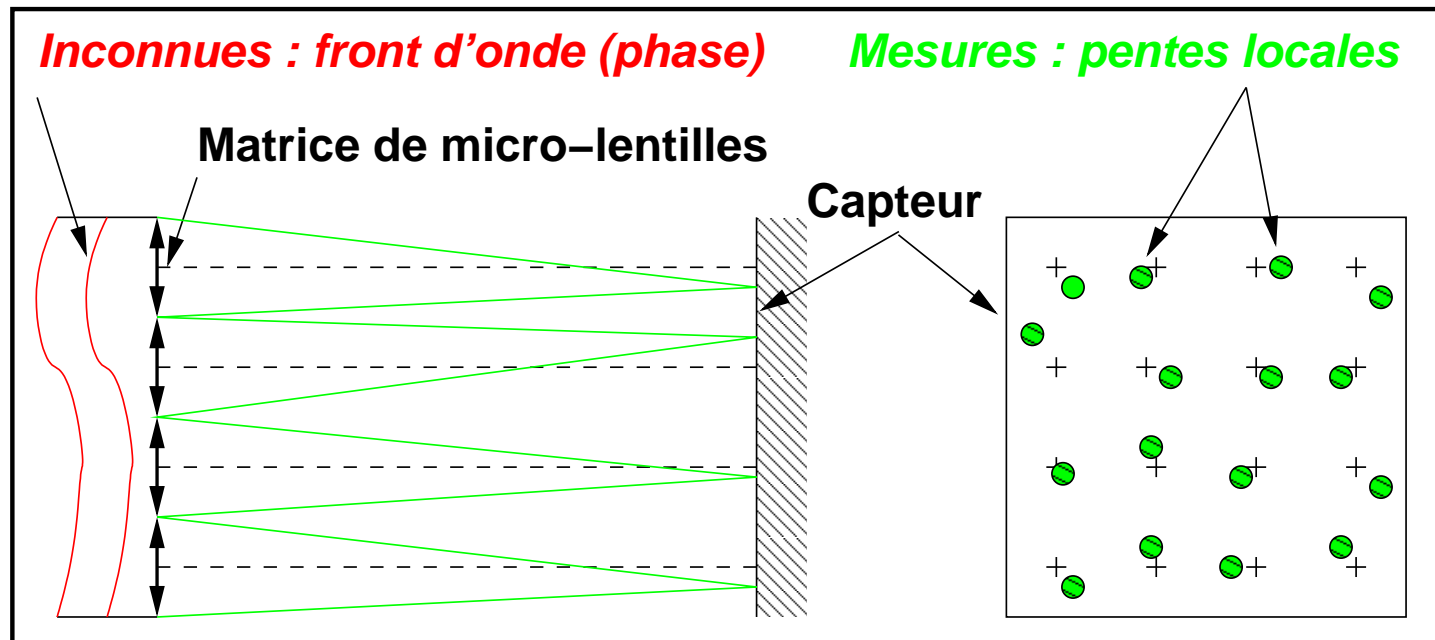
objet o (petite galaxie)

réponse d

image $i = d \star o + b$

d : image d'une étoile de référence (63 Ceti) enregistrée le 28/09/1997 sur le **banc d'optique adaptative ONERA, télescope 1.52 m Observatoire de Haute Provence**

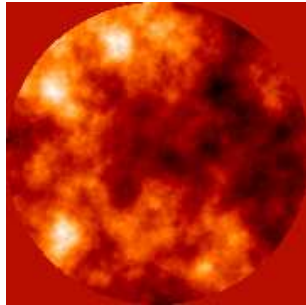
Analyseur de Surface d'Onde : Shack-Hartmann



J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

- ❑ Principe : mesure des pentes locales du front d'onde ;
- ❑ Fonctionnement: objets ponctuels ou étendus & polychromatique.
- ❑ *Estimation* des pentes : CdG, Corrélation... (voir cours 4 pour justification)
- ❑ *Estimation* du front d'onde à partir des pentes : MC/MV ou MAP/EQM minimal

Reconstruire et Déconvoluer



Phase mesurée par SH 12×12

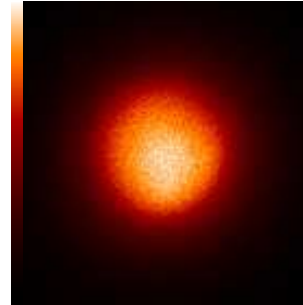


Image Ganymède

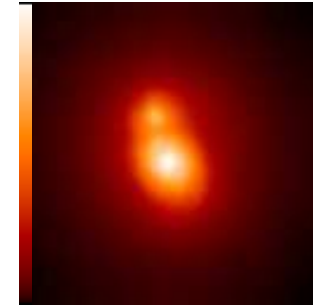
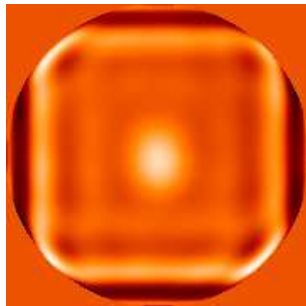
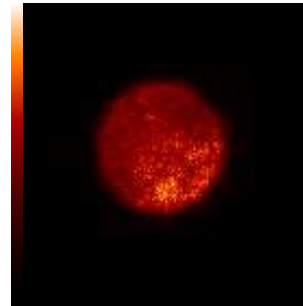


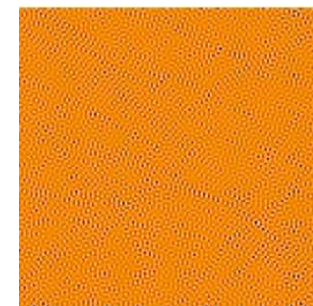
Image galaxie



Sol. Moindres-Carrés (MC)



Richardson-Lucy



Filtre Inverse

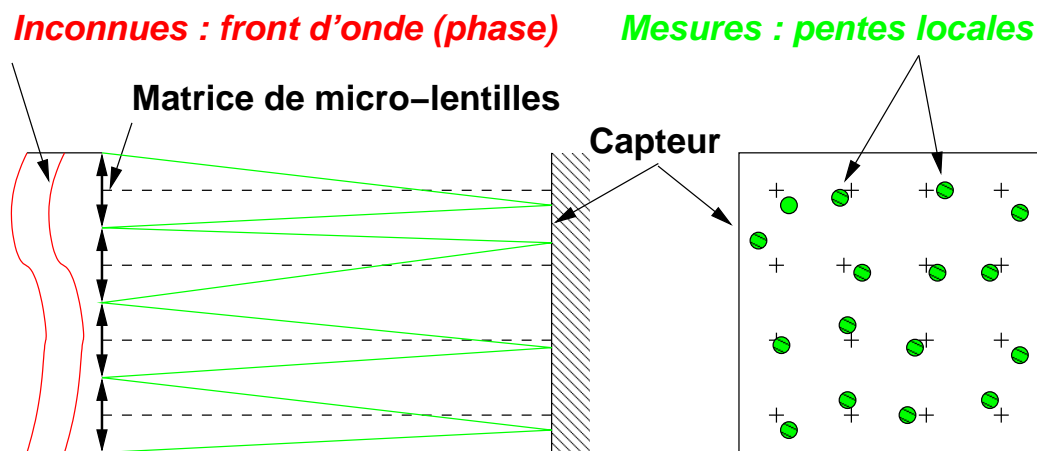
Choix de la méthode de reconstruction / déconvolution ?

L'estimation : un problème inverse

- Estimation de paramètres physiques à partir d'une mesure indirecte



- Analyse de front d'onde par Shack-Hartmann



- Restauration d'images



- Reconstruction d'images en interférométrie optique



J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

Résolution « classique » d'un problème inverse

On cherche $\hat{\phi}$ tel que $y = D\hat{\phi}$

Problème (linéaire) inversible : $\begin{cases} \text{existence} & y \in \text{Im}(D) \\ \text{unicité} & \text{Ker}(D) = \{0\} \end{cases}$ (pas de mode non vu)

❑ **Systeme sur-déterminé** : $\dim(y) \geq \dim(\phi)$
en général pas de solution exacte donnant l'égalité

❑ **Systeme sous-déterminé** : $\dim(y) \leq \dim(\phi)$
en général des solutions exactes, mais non uniques

❑ **Si $\dim(\phi) = \dim(y)$ et D inversible**
il y a une solution exacte et unique
mais ce cas n'est pas fréquent...

Moindres Carrés

On cherche $\hat{\phi}$ qui minimise le *critère des moindres carrés* :

$$\|y - D\hat{\phi}\|^2 = \inf_{\phi} \|y - D\phi\|^2 \quad (1)$$

Legendre (1805) et Gauss (entre 1795 et 1809) :

estimation ellipticité Terre à partir mesures longueurs d'arc → définition du mètre.

❑ existence assurée (en dim. finie) :

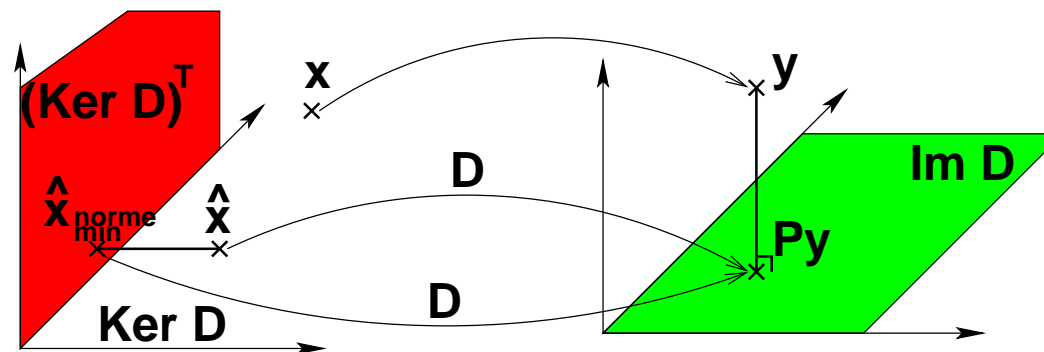
$$(1) \Leftrightarrow Py = D\hat{\phi}, \quad \text{où } P \text{ projecteur sur } \text{Im}(D).$$

❑ unicité assurée :

si $\text{Ker}(D) \neq \{0\}$ on projette $\hat{\phi}$ sur $\text{Ker}(D)^\perp$

→ solution MC de norme minimale $\hat{\phi}_{\text{norme}_{\min}}$, ou **Inverse Généralisé**

❑ Solution s'écrit $\hat{\phi}_{\text{MC}} = (D^t D)^\dagger D^t y$



Rappels sur les processus Gaussiens

❑ **Matrice de covariance de \mathbf{x} :** $C_x(i, j) = \mathbb{E} \{ [x(i) - \bar{x}(i)] [x(j) - \bar{x}(j)]^t \}$,
où $\bar{x}(i) \triangleq \mathbb{E}[x(i)]$.

❑ **\mathbf{x} est dit blanc ssi C_x diagonale.**

❑ **Loi gaussienne :** $p(\mathbf{x}) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t C_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right)$

❑ **Processus stationnaire : propriétés statistiques invariantes par translation**

👉 C_x Toeplitz, c.-à-d. $C_x(i, j)$ ne dépend que de $(i - j)$;

Modèle direct et vraisemblance

- ❑ **Modèle direct supposé linéaire en les paramètres d'intérêt : $y = D\phi + b$.**

b : incertitudes sur la mesure

(bruit de détection, imperfection modèle, ...)

- ❑ **Modèle statistique usuel du "bruit" b : loi à densité de probabilité p_b .**

Ex 1 : bruit gaussien. $p_b(\mathbf{b}) \propto \exp(-\frac{1}{2}\mathbf{b}^t C_b^{-1} \mathbf{b})$

Ex 2 : bruit blanc gaussien stationnaire. $p_b(\mathbf{b}) \propto \exp(-\frac{1}{2\sigma_b^2} \sum_k b_k^2)$

- ❑ **Vraisemblance des données, par définition :**

proba. de mesurer y sachant que les paramètres sont ϕ , soit

$$p(\mathbf{y}|\phi) = p_b(\mathbf{y} - D\phi)$$

Le Maximum de Vraisemblance

❑ **Maximum de Vraisemblance (MV) :**

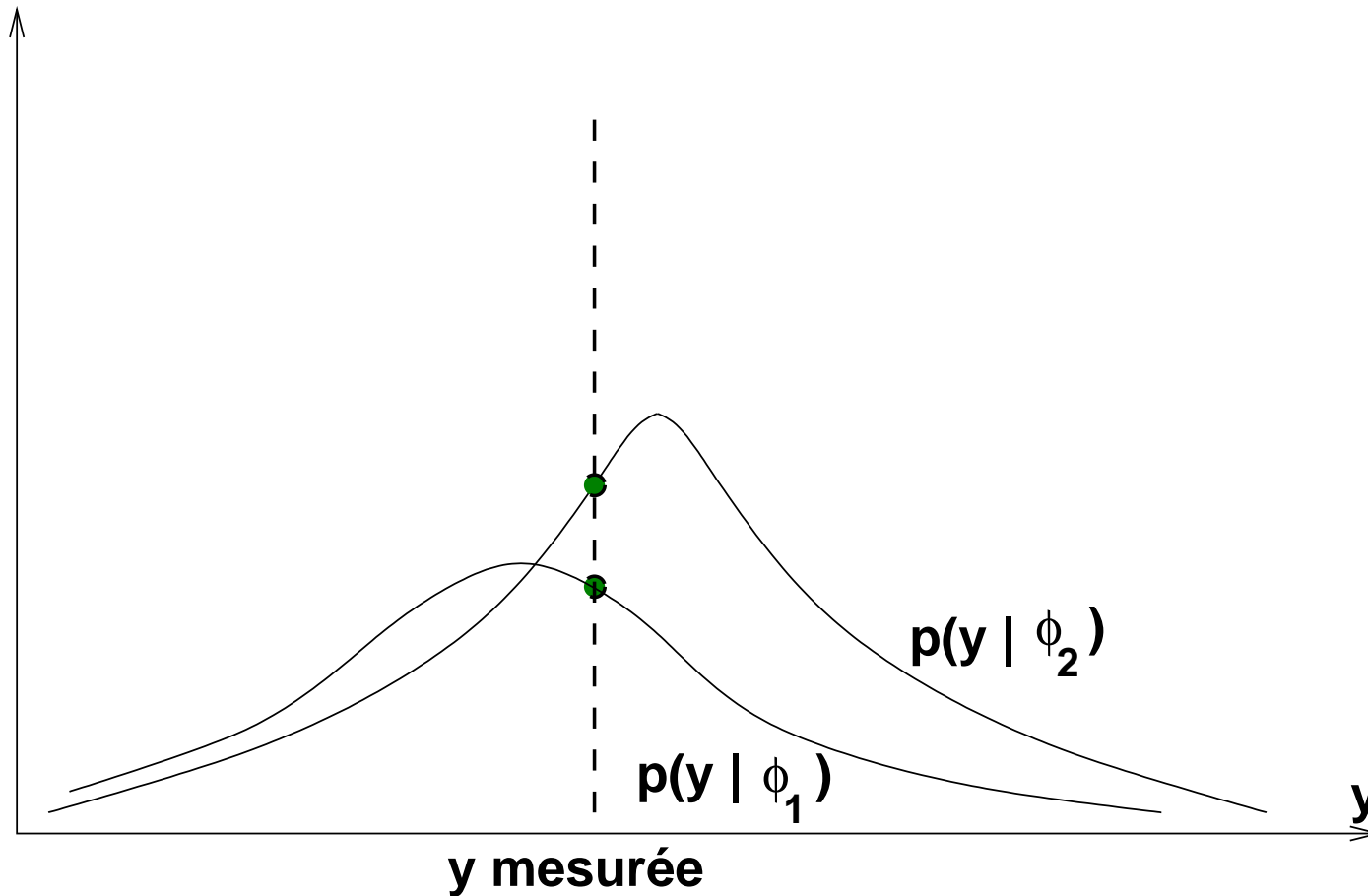
on cherche **les paramètres $\hat{\phi}$ qui maximisent la vraisemblance $p(\mathbf{y}|\phi)$**
donc qui rendent les données \mathbf{y} les plus probables

$$\hat{\phi}_{\text{MV}} = \arg \max_{\phi} p(\mathbf{y}|\phi) = \arg \min_{\phi} J(\phi)$$

$$\text{où } J(\phi) \triangleq \underbrace{-\ln p(\mathbf{y}|\phi)}_{\text{fidélité aux données,}}$$

❑ **En général, J = distance (définie par stat. bruit) entre mesures et modèle**

Interprétation graphique du Maximum de Vraisemblance



J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

On choisit l'inconnue ϕ qui rend les données y les plus probables.

Maximum de Vraisemblance dans le cas gaussien

- ❑ **Hypothèses : bruit gaussien de covariance C_b :**

$$p_b(\mathbf{b}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{b}^t C_b^{-1} \mathbf{b}\right)$$

- ❑ **vraisemblance : probabilité des mesures (pentes) connaissant la phase,**

$$p(\mathbf{y}|\phi) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - D\phi)^t C_b^{-1} (\mathbf{y} - D\phi)\right)$$

- ❑ **on cherche la phase qui rend les mesures les plus probables :**

$$\hat{\phi}_{\text{MV}} = \arg \max_{\phi} p(\mathbf{y}|\phi) = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2}(\mathbf{y} - D\phi)^t C_b^{-1} (\mathbf{y} - D\phi)$$

**Minimisation d'une distance entre les mesures et le modèle des mesures,
terme dit "de fidélité aux données" (ici moindres carrés [MC])**

- ❑ **Cas d'un bruit blanc homogène : $C_b = \sigma_b^2 \mathbf{1}$**

$$\hat{\phi}_{\text{MV}} = \arg \max_{\phi} p(\mathbf{y}|\phi) = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{y} - D\phi\|^2$$

MV dans le cas gaussien : solution

- **solution analytique :**

$$\hat{\phi}_{\text{MV}} = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2} (\mathbf{y} - D\phi)^t C_b^{-1} (\mathbf{y} - D\phi) = (D^t C_b^{-1} D)^{-1} D^t C_b^{-1} \mathbf{y},$$

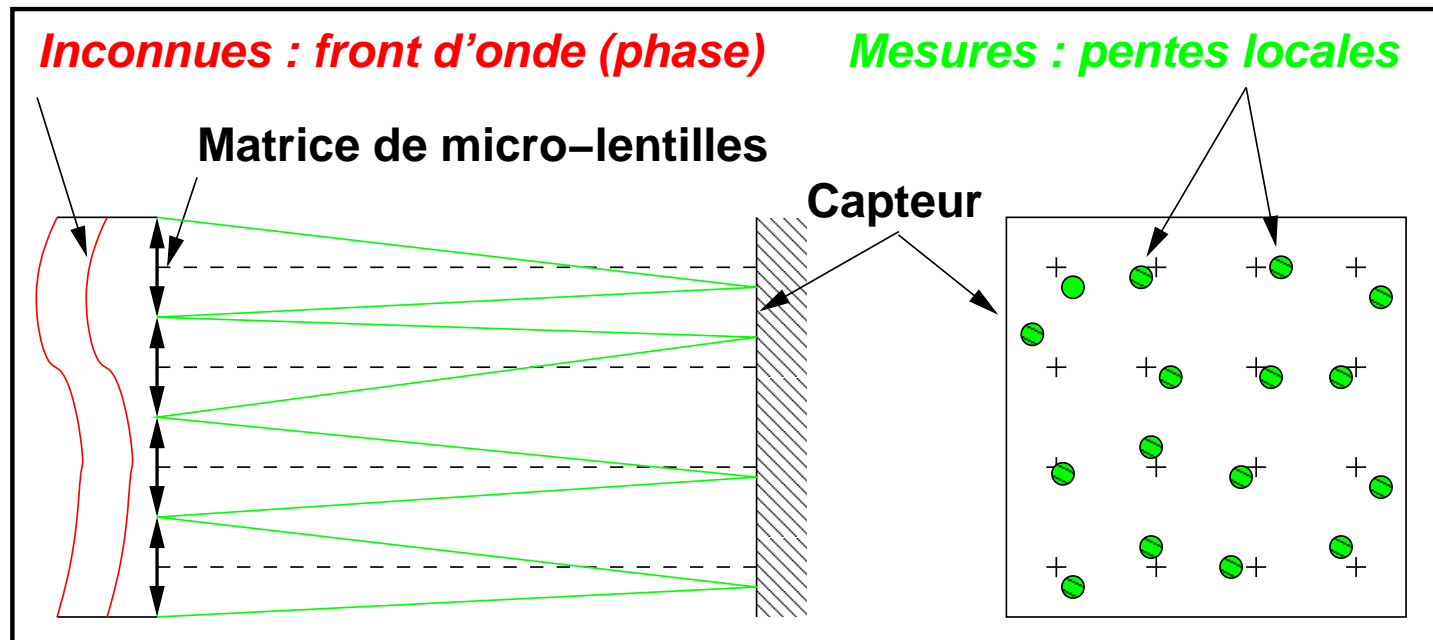
solution moindres carrés pondérés ;

- **cas particulier $C_b = \sigma_b^2 \mathbf{1}$:**

$$\hat{\phi}_{\text{MV}} = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{y} - D\phi\|^2 = (D^t D)^{-1} D^t \mathbf{y},$$

solution moindres carrés.

Analyseur de Surface d'Onde : Shack-Hartmann



J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

- ❑ Principe : mesure des pentes locales du front d'onde ;
- ❑ Fonctionnement: objets ponctuels ou étendus & polychromatique.
- ❑ *Estimation* des pentes : CdG, Corrélation... (voir cours 4 pour justification)
- ❑ *Estimation* du front d'onde à partir des pentes : MC/MV ou MAP/EQM minimal

Polynômes de Zernike

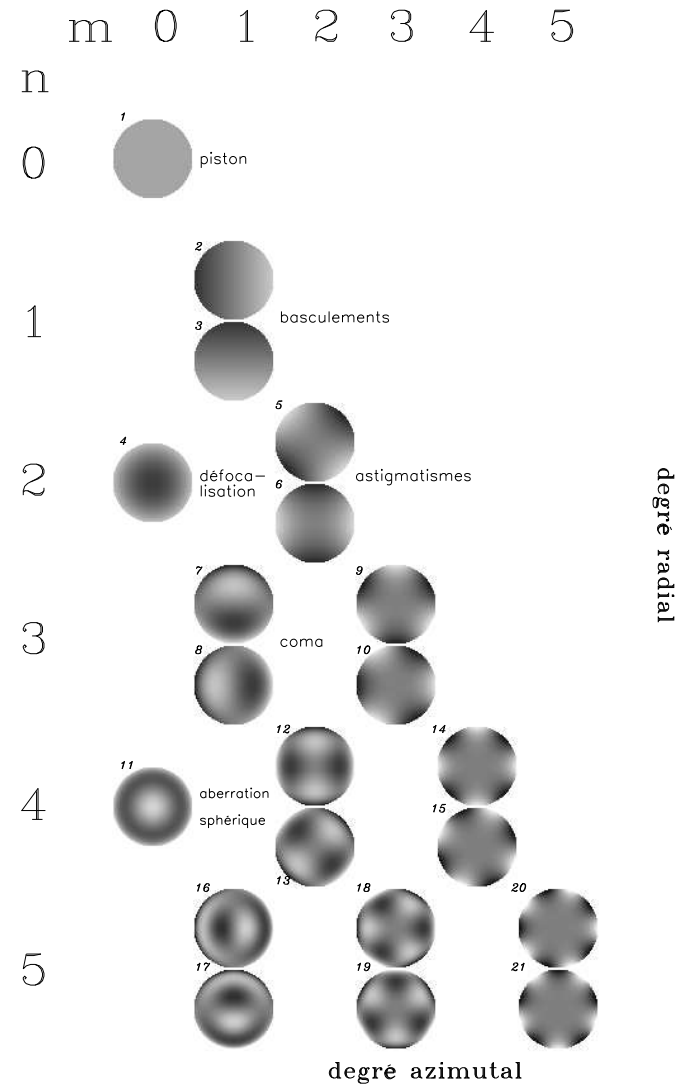
❑ Polynômes orthonormés sur $\mathcal{D}(0, 1)$;

❑ Décomposition de toute phase sur cette base de « modes » :

$$\phi(u, v) = \sum_j \phi_j Z_j(u, v)$$

❑ **Ordre radial n** ↗ ⇒ **Fréq. spatiale** ↗

$$f_{eq}(n) \simeq 0,3(n + 1)/D$$



J.-M. Conan, L. Mugnier – 2015-2016

Analyse de surface d'onde: problème direct

- ❑ Mesures Shack-Hartmann : K sous-pupilles $\rightarrow 2K$ pentes $\{p_{x/y,i}\} = \mathbf{y}$

$$p_{x,i} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u} du dv + \text{bruit}$$

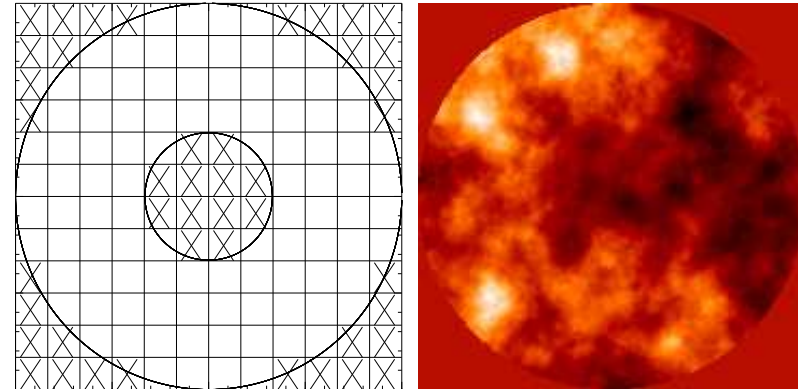
- ❑ ASO : le modèle direct est linéaire : $\mathbf{y} = D\phi + \mathbf{b}$ avec par exemple:

$$\phi = \{\phi_j\} \quad \text{et} \quad \phi(u, v) = \sum_{j=2}^{j_{max}} \phi_j Z_j(u, v),$$

$$D = 2K \begin{pmatrix} \leftarrow j_{max} \rightarrow \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

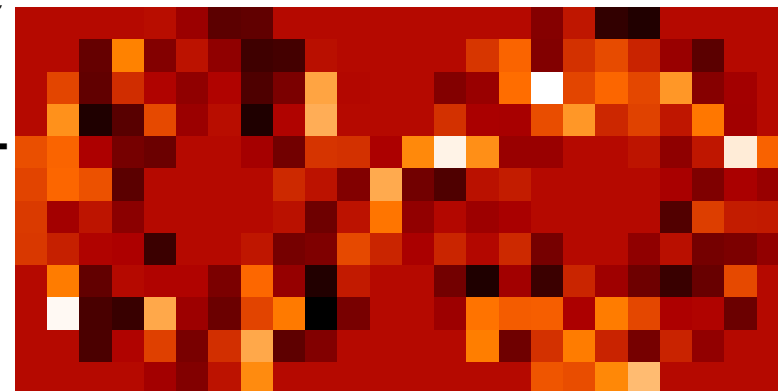
Simulation d'analyse de front d'onde par Shack-Hartmann

- ❑ 12×12 sous-pupilles,
occultation centrale $d/D = 0.33$;
- ❑ $K = 100$ pupilles éclairées
 $\Rightarrow 2.K = 200$ mesures de pentes ;
- ❑ modèle de données : $y = D\phi + \mathbf{b}$;
- ❑ inconnues : ϕ , décomposées sur j_{max}
polynômes de Zernike ;
- ❑ \mathbf{b} blanc gaussien centré (et approx^t sta-
tionnaire), tel que $RSB_{pentes} = 100$;
- ❑ D de taille $2.K \times j_{max}$.



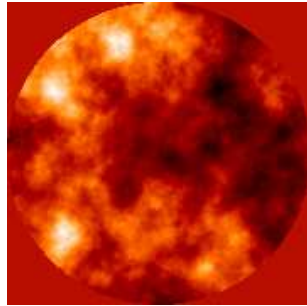
Sous-pupilles

Phase vraie

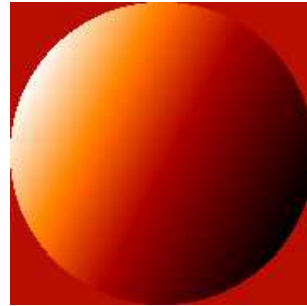


Mesure : pentes en x, et en y

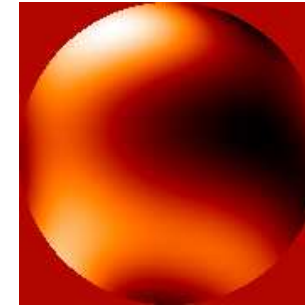
Reconstruction de front d'onde : MV alias MC tronqués



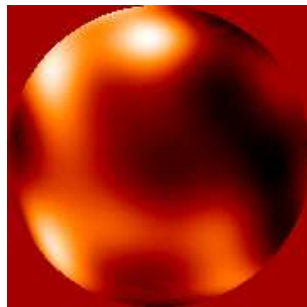
Phase vraie
 $\sigma_{\varphi}^2 = 3.5 \text{ rad}^2$



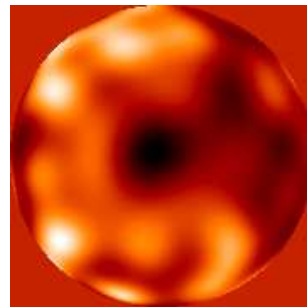
MV $j_{max} = 3$
 $\sigma_{err}^2 = 2.6 \text{ rad}^2$



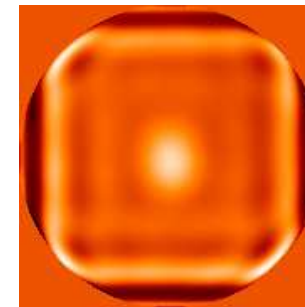
MV $j_{max} = 21$
 $\sigma_{err}^2 = 1.1 \text{ rad}^2$



MV $j_{max} = 55$
 $\sigma_{err}^2 = 0.8 \text{ rad}^2$



MV $j_{max} = 105$
 $\sigma_{err}^2 = 1.0 \text{ rad}^2$



MV $j_{max} = 153$
 $\sigma_{err}^2 = 210 \text{ rad}^2$

Qualité de reconstruction dépend de j_{max}

j_{max} optimal dépend de $RSB_{pentés}$.

MV dans le cas gaussien : analyse

❑ **solution analytique** : $\hat{\phi}_{\text{MV}} = (D^t C_b^{-1} D)^{-1} D^t C_b^{-1} \mathbf{y}$;

❑ **cas particulier** $C_b = \sigma_b^2 \mathbf{1}$:

$$\hat{\phi}_{\text{MV}} = \arg \min_{\phi} \frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{y} - D\phi\|^2 = (D^t D)^{-1} D^t \mathbf{y} ,$$

solution moindres carrés ;

❑ $D^t C_b^{-1} D$ **mal conditionnée voire non inversible** \Rightarrow **amplification du bruit** ;

❑ \Rightarrow **limiter nombre de modes à reconstruire + choisir une « bonne » base**
(en ASO : concentrant l'énergie turbulente et sans mode non vu)...

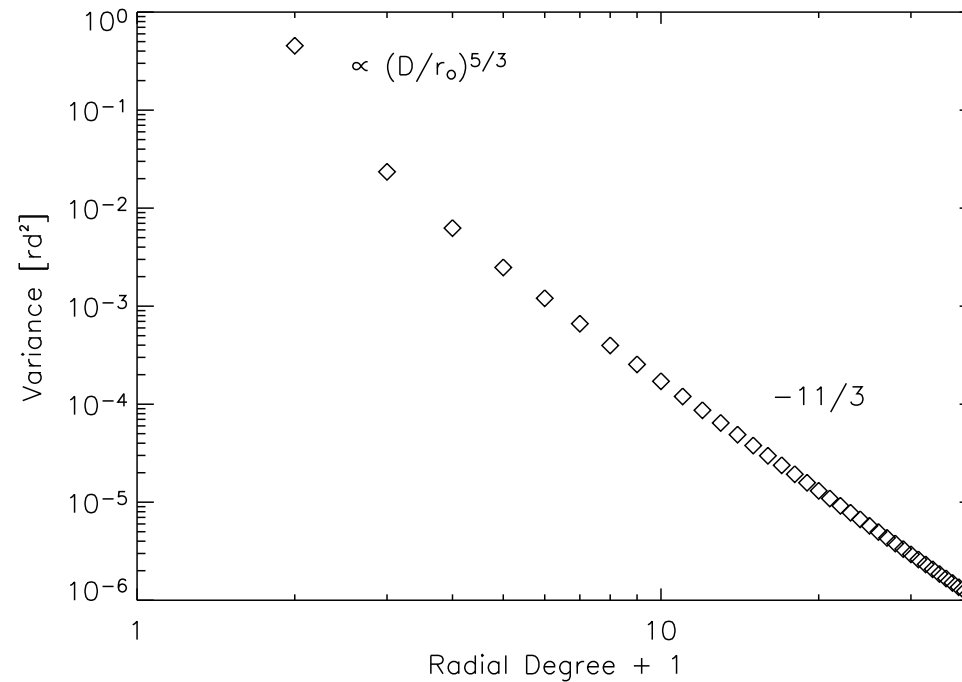
❑ **ou régulariser l'inversion.**

Caractérisation statistique de la phase turbulente

□ Kolmogorov $\Rightarrow \phi$ gaussienne : $p(\phi) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})^t C_\phi^{-1}(\phi - \bar{\phi})\right)$

et centrée : $\bar{\phi} = \mathbf{0}$;

□ $C_\phi(j, j) = \sigma_{\phi_j}^2$, dans la base des polynômes de Zernike :



$$S_\phi(f) = 0,023r_0^{-5/3} f^{-11/3}, \quad f_{\text{eq}}(n) \simeq 0,3(n+1)/D$$

$$\rightarrow \sigma_\phi^2(n) \approx (D/r_0)^{5/3} (n+1)^{-11/3}$$

Le Maximum A Posteriori

❑ Règle de Bayes :

$$\underbrace{p(\phi|\mathbf{y})}_{\text{loi a posteriori}} = \frac{p(\mathbf{y}|\phi) p(\phi)}{p(\mathbf{y})} \propto \underbrace{p(\mathbf{y}|\phi)}_{\text{modèle + loi du bruit}} \times \underbrace{p(\phi)}_{\text{a priori sur } \phi}$$

❑ Maximum A Posteriori (MAP) :

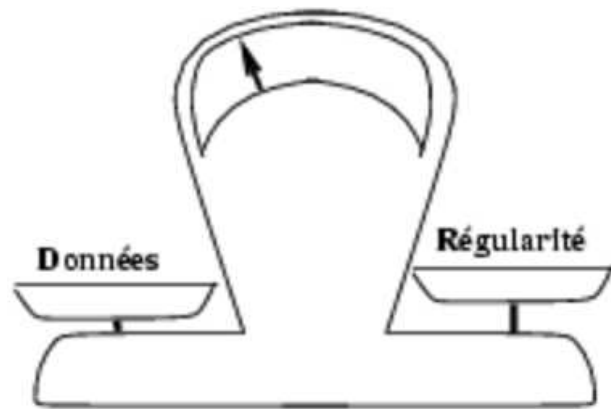
on cherche **les paramètres $\hat{\phi}$ les plus probables sachant les données \mathbf{y}**

$$\hat{\phi}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\phi} p(\phi|\mathbf{y}) = \arg \min_{\phi} J(\phi)$$

$$\text{où } J(\phi) \triangleq -\ln p(\phi|\mathbf{y}) = \underbrace{-\ln p(\mathbf{y}|\phi)}_{\substack{\text{fidélité aux données,} \\ \frac{1}{2\sigma_b^2} \|\mathbf{y} - D\phi\|^2 \text{ par ex.}}} - \underbrace{\ln p(\phi)}_{\text{fidélité à l'a priori}} \quad (+ \text{cste})$$

❑ Fusion d'informations / compromis entre ce que nous apprennent les données et ce que l'on sait *a priori*.

La régularisation comme un compromis (régularisation par pénalisation)



$$J(\phi) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - D\phi\|^2 + \sigma_b^2 (-\ln p(\phi))$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\phi} J(\phi)$$

Interprétation "déterministe" :

$J(\phi)$: critère pénalisé ou régularisé ;

$-\ln p(\phi)$: fonctionnelle de régularisation ;

σ_b^2 : paramètre de régularisation.

$$\sigma_b^2 \rightarrow 0$$

$$J(\phi) \propto \|\mathbf{y} - D\phi\|^2$$

$\hat{\phi}_0 =$ solution MC (ultra-« chahutée »)

fidélité aux données seulement

$$\sigma_b^2 \rightarrow \infty$$

$$J(\phi) \propto -\ln p(\phi)$$

$\hat{\phi}_\infty =$ solution *a priori* (ultra-lisse)

fidélité à l'*a priori* seulement

Reconstruction de front d'onde au sens du MAP alias MAP avec bruit & *a priori* gaussiens

- ❑ Vraisemblance *a posteriori* donnée par règle de Bayes :

$$\underbrace{p(\phi|\mathbf{y})}_{\text{loi } a \text{ posteriori}} \propto \underbrace{p(\mathbf{y}|\phi)}_{\text{modèle + loi du bruit}} \times \underbrace{p(\phi)}_{a \text{ priori sur } \phi}$$

- ❑ Bruit additif gaussien et *a priori* gaussiens :

$$p(\phi|\mathbf{y}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - D\phi)^t C_b^{-1}(\mathbf{y} - D\phi)\right) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})^t C_\phi^{-1}(\phi - \bar{\phi})\right)$$

Reconstruction de front d'onde au sens du MAP alias MAP avec bruit & *a priori* gaussiens

- Avec ces hypothèses, la solution minimise un critère quadratique :

$$\hat{\phi}_{\text{MAP}}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\phi} J(\phi)$$

$$J(\phi) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{y} - D\phi)^t C_b^{-1}(\mathbf{y} - D\phi)}_{\text{fidélité aux données}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})^t C_{\phi}^{-1}(\phi - \bar{\phi})}_{\text{régularisation}}$$

- Solution MAP :

$$\hat{\phi}_{\text{MAP}} = (D^t C_b^{-1} D + C_{\phi}^{-1})^{-1} (D^t C_b^{-1} \mathbf{y} + C_{\phi}^{-1} \bar{\phi})$$

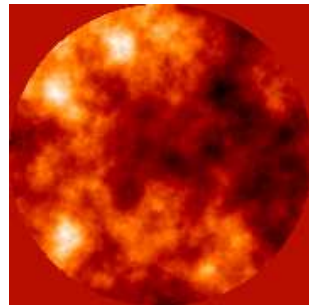
- Solution linéaire (« Wiener ») : *spécifique au cas gaussien*,
 M est appelée « matrice de reconstruction ».

Reconstruction de front d'onde MAP

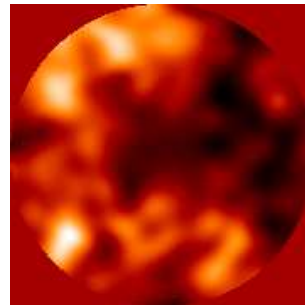
- On cherche la phase la plus vraisemblable sachant les mesures :

$$p(\phi|y) \propto p(y|\phi) \times p(\phi)$$

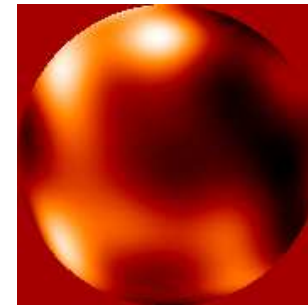
- A priori* utilisé : statistique de la phase turbulente $p(\phi)$ (Kolmogorov)



Phase vraie
 $\sigma_{\phi}^2 = 3.5 \text{ rad}^2$



MAP
 $\sigma_{err}^2 = 0.3 \text{ rad}^2$



MV $j_{max} = 55$
 $\sigma_{err}^2 = 0.8 \text{ rad}^2$

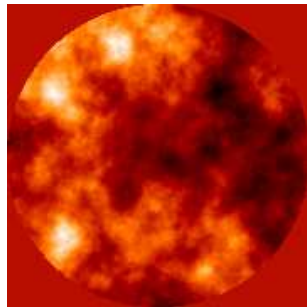
MAP \Rightarrow estimation optimale

- Extension pour la commande en OA : estimation par filtre de Kalman.

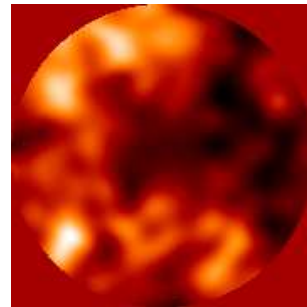
Reconstruction de front d'onde MAP:

Effet d'une sur- ou sous- régularisation

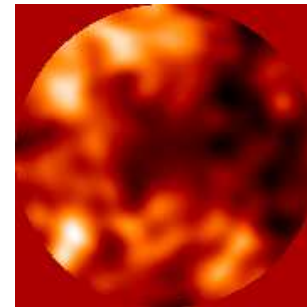
- ❑ Sous-régularisation : variance de bruit sous-estimée d'un facteur 100
- ❑ Sur-régularisation : variance de bruit sur-estimée d'un facteur 100
- ❑ Résultats :



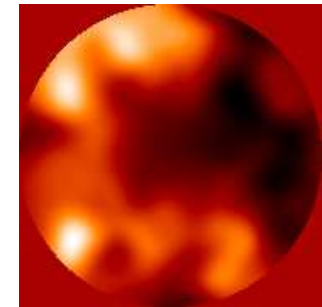
Phase vraie
 $\sigma_{\varphi}^2 = 3.5 \text{ rad}^2$



MAP ok
 $\sigma_{err}^2 = 0.28 \text{ rad}^2$



MAP sous-r
 $\sigma_{err}^2 = 0.31 \text{ rad}^2$



MAP sur-r
 $\sigma_{err}^2 = 0.43 \text{ rad}^2$

Solution MAP robuste aux erreurs sur *a priori*

Synthèse des différents estimateurs

Modèle direct supposé *linéaire* : $y = D\phi + \text{incertitudes}$

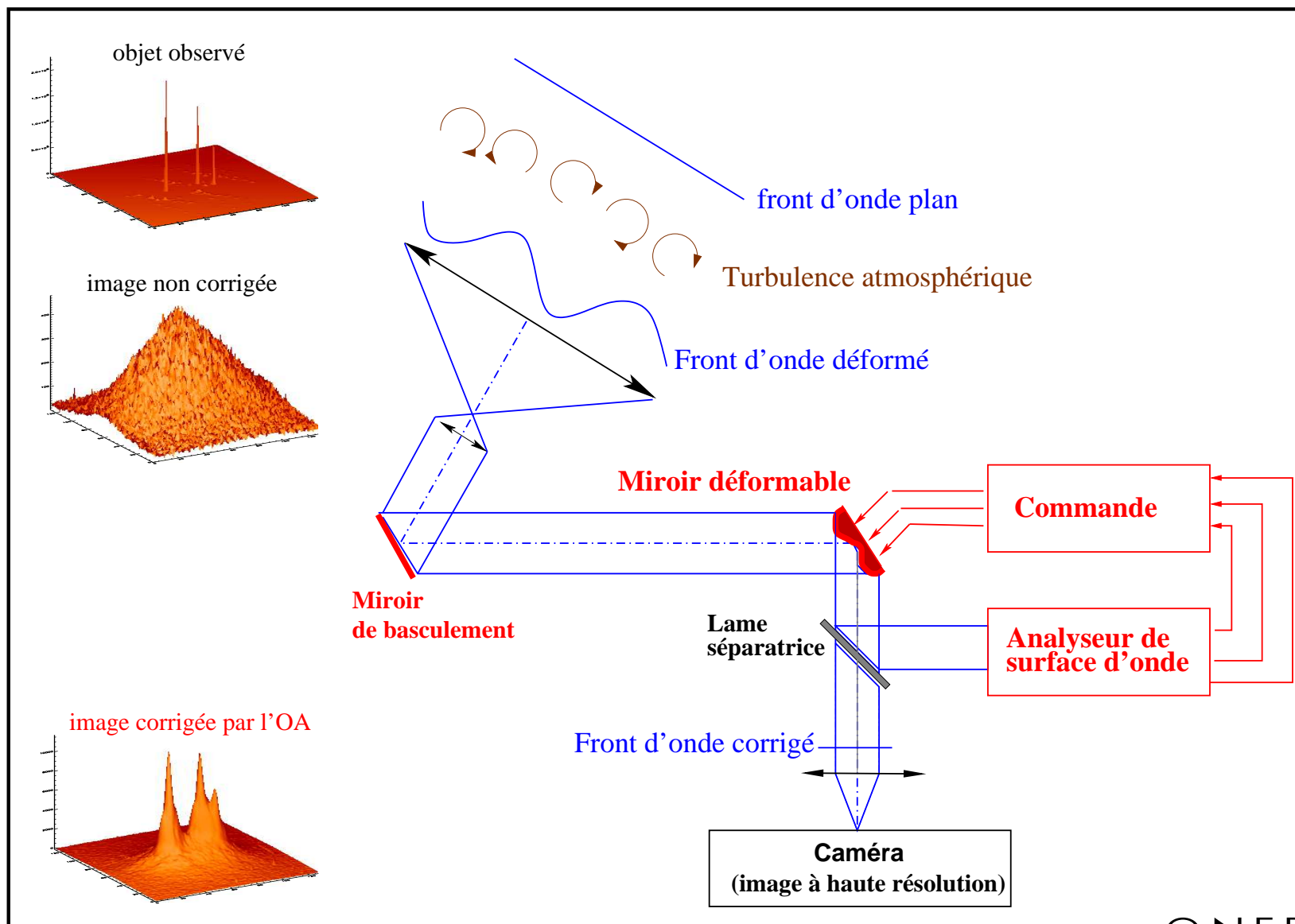
Estimateur	Critère	Solution	Remarques
MC	$\min \ y - D\phi\ ^2$	$(D^t D)^{-1} D^t y$	pas de modèle de bruit
MV	$\max p(y \phi)$	pas explicite en gén.	pas d'<i>a priori</i>
MV + bruit G.	$= \max p_b(y - D\phi)$	$(D^t C_b^{-1} D)^{-1} D^t C_b^{-1} y$	sur solution
MAP + ϕ et b G.	$\max p(\phi y)$	pas explicite en général $(D^t C_b^{-1} D + C_\phi^{-1})^{-1} \times$ $\times (D^t C_b^{-1} y + C_\phi^{-1} \bar{\phi})$	non lin. en gl inclut <i>a priori</i>
EQMM	$\min E_{\phi,y} (\ \phi - \hat{\phi}(y)\ ^2)$	$E_{\phi y} \{\phi\} = \int \phi \cdot p(\phi y) d\phi$	difficile à calculer

Cas (linéaire et) gaussien : EQMM = MAP

Restauration d'images à travers la turbulence

- ❑ Rappels sur l'Optique Adaptative
- ❑ Restauration d'image MAP sous hyp. gaussiennes
- ❑ Extensions : *a priori* non quadratiques, déconvolution myope

Principe de l'optique adaptative

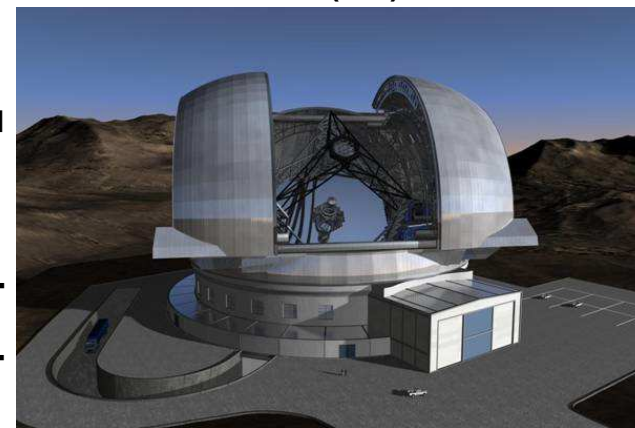


Quelques étapes de l'optique adaptative en Europe

- ❑ 1953 : proposition de l'idée par Babcock ;
- ❑ 1989 : Come-On, 1ère OA astro. au monde, sur le 3,60 m de l'European Southern Observatory (ESO) à La Silla, Chili ; équipe française (ONERA, Obs. Paris-Meudon, Cilas). 19 actionneurs ;
- ❑ 1993 : Come-On+ puis Adonis, *upgrade* à 52 actionneurs et 30 Hz ;
- ❑ 2000-2001 : Naos, 1ère OA d'un des quatre 8 m du VLT (ESO). 15×15 actionneurs, 500 Hz ;
- ❑ 2013-2014 : Sphere/Saxo, OA « extrême » + coronographes sur le VLT, détection de planètes extrasolaires. 41×41 actionneurs, 1200 Hz ;
- ❑ 2020+ : OAs pour l'E-ELT, futur télescope de 39 m.



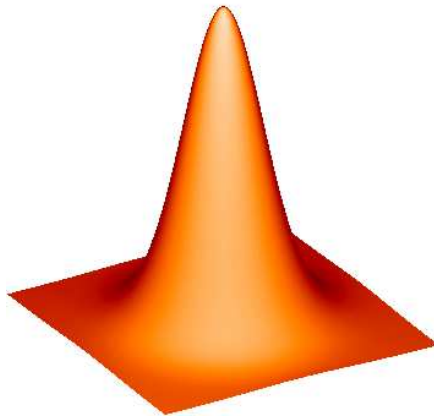
VLT (8 m)



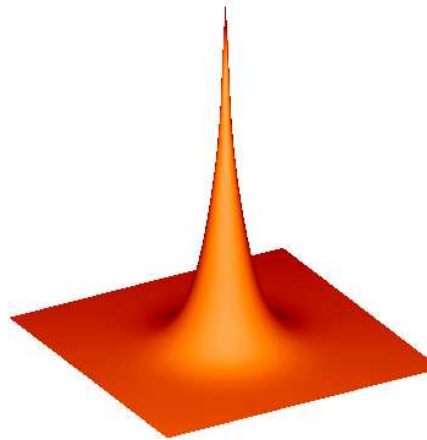
E-ELT (39 m)

Résolution $\propto D$, sensibilité $\propto D^2$.

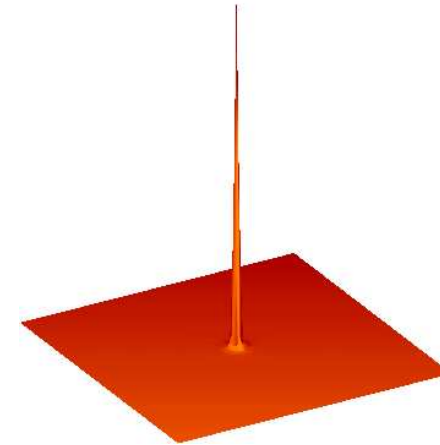
Réponse et FTO longue pose corrigée par OA



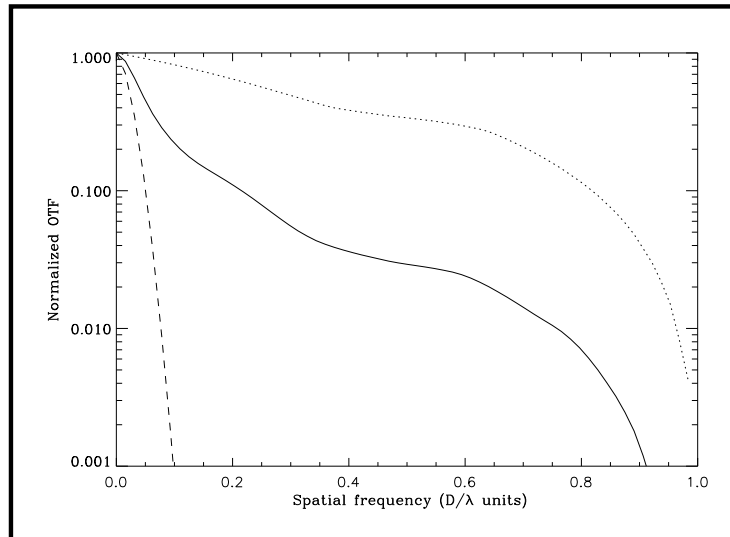
LP turbulente sans correction (- - -)



LP correction partielle (—)

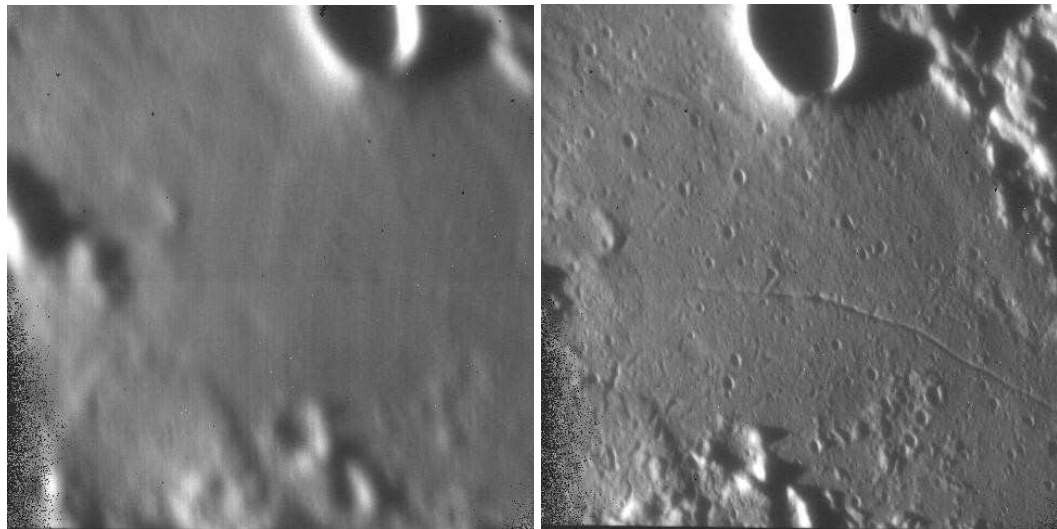


tache d'Airy (- · - ·)



Exemple d'image longue pose corrigée par NAOS

Surface de la lune, champ 26 arcsec (45 km), $\lambda = 2,3 \mu\text{m}$



sans correction par OA avec correction par OA

Telescope VLT : $D = 8m$

System (NAOS): 144 sub-aperture, 185 actuators, 500Hz temporal sampling frequency

Structure de D dans le cas convolutif 1-D

- ❑ image $\mathbf{i} = \mathbf{d} \star \mathbf{o} + \mathbf{b} = D\mathbf{o} + \mathbf{b}$
- ❑ Linéarité $\Rightarrow D$ **matrice**
- ❑ Invariance par translation \Rightarrow structure **Toeplitz** (diagonales constantes) :

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{d_0} & d_{-1} & \dots & \boxed{d_{-p}} & 0 & - & 0 & d_p & \dots & d_1 \\ d_1 & & \diagdown & \vdots & & & | & & & \vdots \\ \vdots & & & d_{-1} & & & 0 & & & d_p \\ \boxed{d_p} & & & \boxed{d_0} & & & \boxed{d_{-p}} & & & 0 \\ 0 & & & d_1 & & & \vdots & & & | \\ | & & & \vdots & & & d_{-1} & & & 0 \\ 0 & & & \boxed{d_p} & & & d_0 & & & \boxed{d_{-p}} \\ d_{-p} & & & 0 & & & d_1 & & & \vdots \\ \vdots & & & | & & & \vdots & & & \boxed{d_{-1}} \\ d_{-1} & \dots & d_{-p} & 0 & - & 0 & \boxed{d_p} & \dots & d_1 & \boxed{d_0} \end{pmatrix}$$

$$\text{Rq : } \boxed{D \rightarrow D^t \Leftrightarrow \mathbf{d}(j) \rightarrow \mathbf{d}(-j) \quad \forall j} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{d}}(j') \rightarrow \tilde{\mathbf{d}}^*(j') \quad \forall j'$$

Propriétés des matrices circulantes

$$D = \begin{pmatrix} \left. \begin{array}{c} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_p \\ 0 \\ \vdots \\ d_{-p} \\ \vdots \\ d_{-1} \end{array} \right| \begin{array}{c} d_{-1} \\ \vdots \\ d_{-p} \\ 0 \\ \vdots \\ d_{-1} \end{array} \cdots \left. \begin{array}{c} d_{-p} \\ \vdots \\ d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ d_{-1} \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ d_p \end{array} \left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ d_{-1} \\ d_0 \\ \vdots \\ d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{array} \right| \begin{array}{c} d_p \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ d_1 \\ \vdots \\ d_0 \end{array} \cdots \left. \begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ d_{-1} \\ \vdots \\ d_0 \end{array} \right| \end{pmatrix} \Rightarrow WDW^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{d}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{d}(N-1) \end{pmatrix} \text{ où}$$

$W = (\exp(-2j\pi kl/N))_{kl}$ matrice de la TFD et $\tilde{d} = TFD(d)$:

- ❑ les vecteurs propres de D sont les exponentielles de Fourier discrètes ;
- ❑ les valeurs propres de D sont les valeurs de la transformée de Fourier discrète $\tilde{d} = TFD(d)$;
- ❑ Ré-écriture problème direct :

$$\mathbf{i} = D\mathbf{o} + \mathbf{b} \Rightarrow W\mathbf{i} = WDW^{-1}W\mathbf{o} + W\mathbf{b} \quad \text{soit}$$

$$\tilde{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \tilde{d}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{d}(N-1) \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{o}} + \tilde{\mathbf{b}} : \text{ on retrouve le fait que } D \leftrightarrow \text{convolution}$$

Formulation fréquentielle de la solution MV

D matrice (approximée) circulante,

$$\mathbf{i} = D\mathbf{o} \quad \leftrightarrow i(t) = (d \star o)(t) \quad \leftrightarrow \tilde{i}(f) = \tilde{d}(f) \cdot \tilde{o}(f)$$

$$\mathbf{i} = D^t\mathbf{o} \quad \leftrightarrow i(t) = (d_- \star o)(t) \quad \text{où } d_-(t) \triangleq d(-t) \quad \leftrightarrow \tilde{i}(f) = \tilde{d}^*(f) \cdot \tilde{o}(f)$$

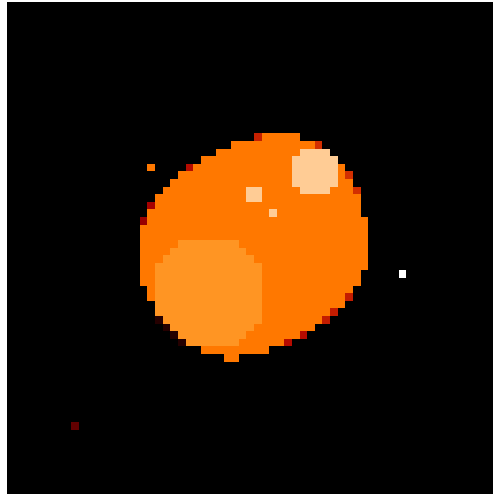
$$\mathbf{i} = D^{-1}\mathbf{o} \quad \leftrightarrow i(t) = (d^{-1} \star o)(t) \quad \text{où } d^{-1} \star d \triangleq \delta \quad \leftrightarrow \tilde{i}(f) = \tilde{o}(f) / \tilde{d}(f)$$

MV sous hyp. gaussiennes : $\hat{\mathbf{o}}_{\text{MV}} = (D^t C_b^{-1} D)^{-1} D^t C_b^{-1} \mathbf{i}$

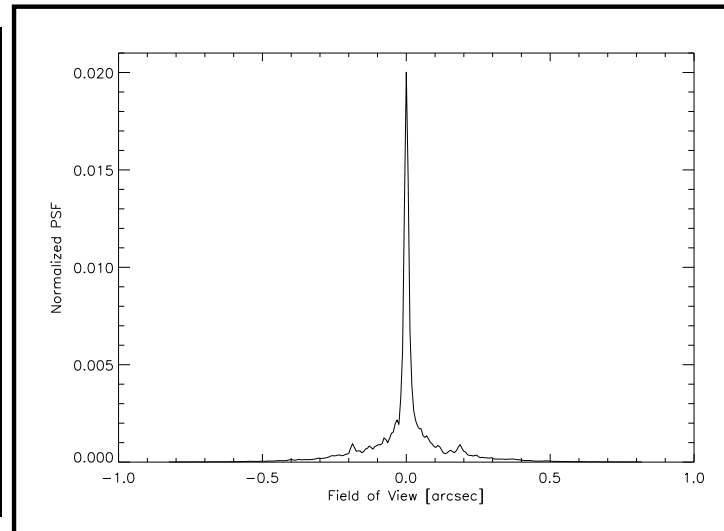
$$\rightarrow \hat{\tilde{o}}_{\text{MV}}(f) = \frac{\tilde{d}^*(f) \tilde{i}(f)}{|\tilde{d}(f)|^2} = \frac{\tilde{i}(f)}{\tilde{d}(f)}$$

filtre inverse !

Image Longue Pose Partiellement Corrigée: simulation



objet o



FEP d

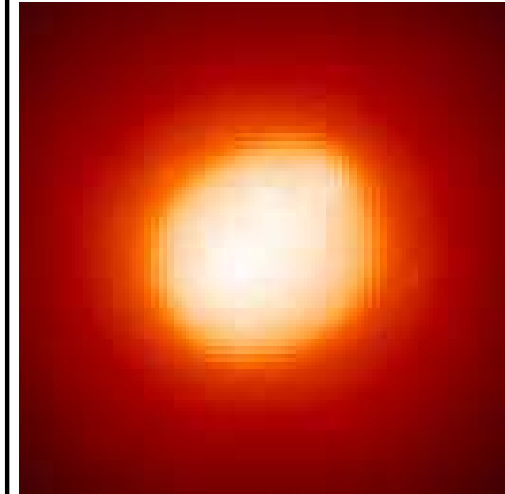


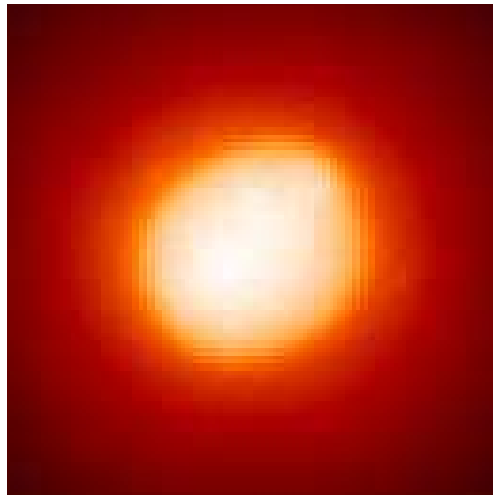
image $i = d \star o + b$

Correction Partielle \implies Déconvolution

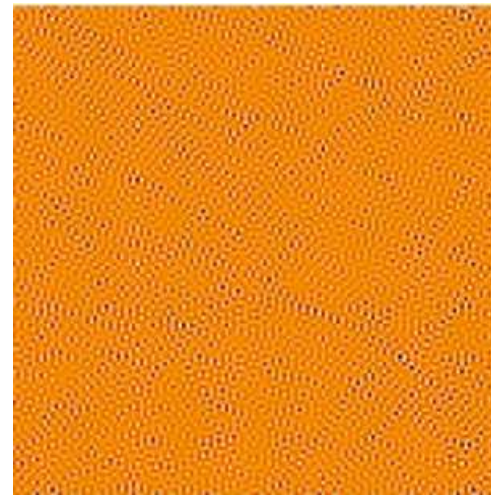
cas VLT-NAOS : $M_v = 11$, $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, seeing de 0.73 arcsec , $SR = 2.1\%$

champ 0.8 arcsec , $D/r_o \approx 60$.

Restauration par MV



Image



Objet restauré par filtre inverse

❑ bruit blanc gaussien homogène \Rightarrow MV = filtre inverse.

Rappels sur les processus Gaussiens

❑ **Matrice de covariance de \mathbf{x} :** $C_x(i, j) = \mathbb{E} \{ [x(i) - \bar{x}(i)] [x(j) - \bar{x}(j)] \}$, \mathbf{x} blanc ssi C_x diagonale.

❑ **Statistique gaussienne :** $p(\mathbf{x}) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t C_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right)$

❑ **Processus stationnaire : propriétés statistiques invariantes par translation**

☞ C_x Toeplitz, c.-à-d. $C_x(i, j)$ ne dépend que de $(i - j)$;

☞ approximation circulante \Rightarrow diagonalisable par TFD :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t C_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) &= [W(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})]^* (W C_x^{-1} W^{-1}) [W(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})] \\ &= (\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}})^* \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_x(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\mathbf{S}}_x(N-1) \end{pmatrix} (\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}) \\ &= \sum_f |\tilde{x}(f) - \tilde{\tilde{x}}(f)|^2 / \mathbf{S}_x(f) \end{aligned}$$

où $\mathbf{S}_x(f) = \mathbb{E}(|\tilde{x}(f) - \tilde{\tilde{x}}(f)|^2)$: **Densité Spectrale de Puissance.**

MAP gaussien / régularisation quadratique

❑ **MAP à bruit et objet gaussiens :** $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, C_b = \sigma^2 I)$

$\mathbf{o} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{o}}, C_o)$, avec $C_o(j, k) = \mathbb{E}\{(o_j - \bar{o}_j) \cdot (o_k - \bar{o}_k)\}$

$$J(\mathbf{o}) = \frac{\|D\mathbf{o} - \mathbf{i}\|^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}(\mathbf{o} - \bar{\mathbf{o}})^t C_o^{-1}(\mathbf{o} - \bar{\mathbf{o}}), \quad \text{où } D\mathbf{o} = \mathbf{d} \star \mathbf{o}$$

❑ **Critère : Moindres Carrés + pénalisation quadratique**

$$R(\mathbf{o}) = \frac{1}{2}(\mathbf{o} - \bar{\mathbf{o}})^t C_o^{-1}(\mathbf{o} - \bar{\mathbf{o}}) = \|\mathcal{D}(\mathbf{o} - \bar{\mathbf{o}})\|^2$$

❑ **Solution :**

$$\hat{\mathbf{O}}_{\text{MAP}} = (D^t C_b^{-1} D + C_o^{-1})^{-1} (D^t C_b^{-1} \mathbf{i} + C_o^{-1} \bar{\mathbf{o}})$$

Formulation fréquentielle de la solution MAP

- ❑ D matrice (approximée) circulante,
- ❑ Bruit et objet gaussiens : $\mathbf{b} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$, DSP du bruit $S_b \propto \sigma^2$
 o gaussien stationnaire de DSP $S_o(f) = E[|\tilde{o}(f) - \tilde{\tilde{o}}(f)|^2]$

$$J(o) = \frac{1}{2} \sum_f \frac{|\tilde{d}(f)\tilde{o}(f) - \tilde{i}(f)|^2}{S_b} + \frac{1}{2} \sum_f \frac{|\tilde{o}(f) - \tilde{\tilde{o}}(f)|^2}{S_o(f)},$$

- ❑ Critère : **Moindres Carrés + pénalisation quadratique**

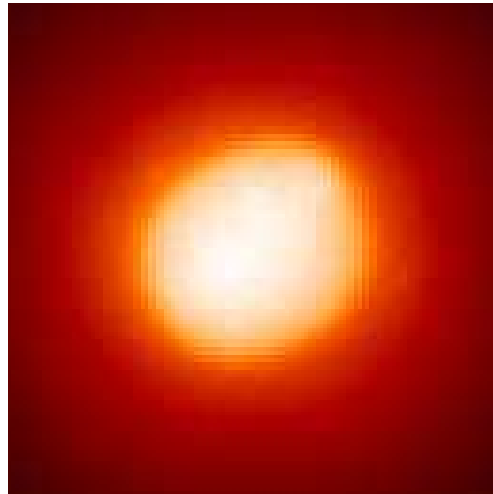
- ❑ Solution :

$$\hat{o}_{\text{MAP}}(f) = \frac{\tilde{d}^*(f)\tilde{i}(f)}{|\tilde{d}(f)|^2 + S_b/S_o(f)} + \frac{S_b/S_o(f)}{|\tilde{d}(f)|^2 + S_b/S_o(f)}\tilde{\tilde{o}}(f)$$

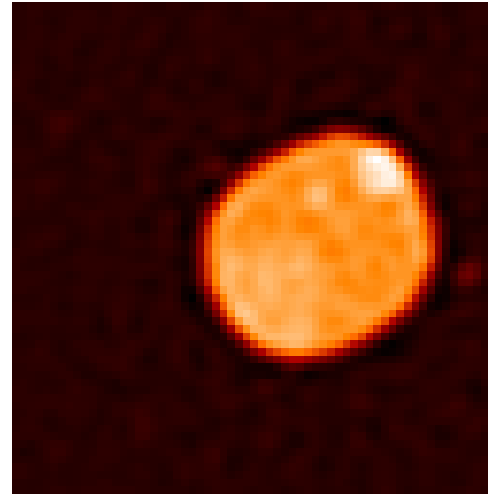
filtre inverse à très fort RSB, solution *a priori* à très faible RSB.

Interprétation : $\hat{o}_{\text{MAP}}(f) = \lambda(f)\tilde{\tilde{o}}_{\text{MV}}(f) + (1 - \lambda)(f)\tilde{\tilde{o}}(f)$

Restauration par MAP gaussien



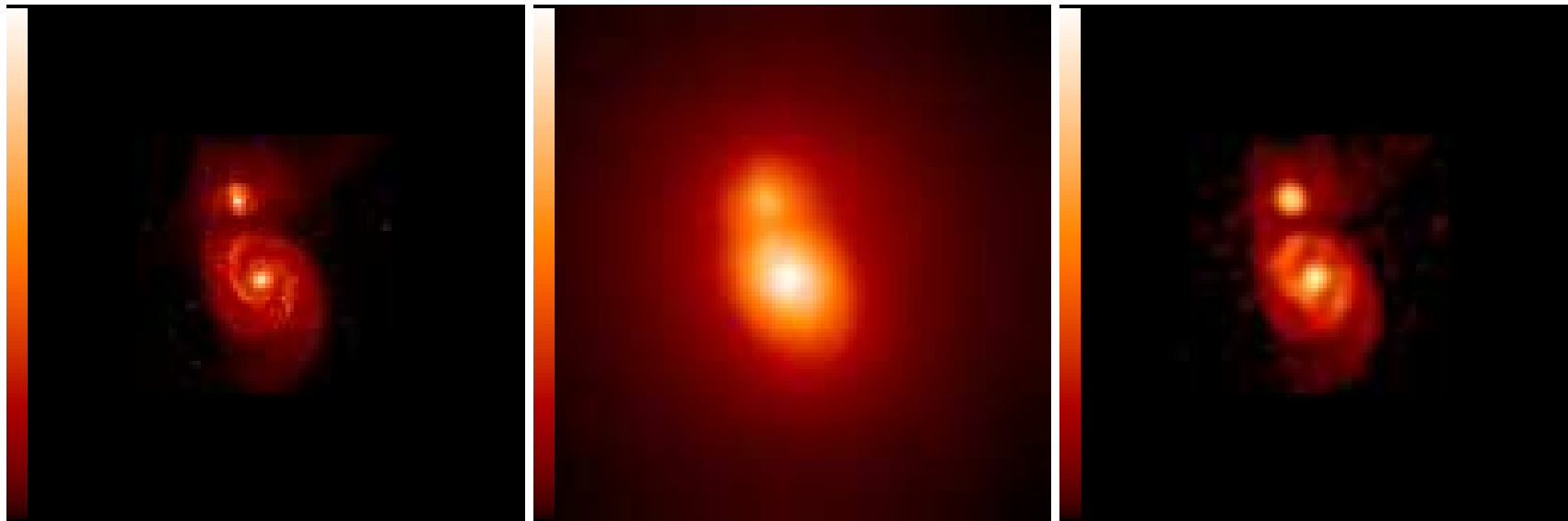
Image



Objet restauré (Wiener)

- ❑ DSP en f^{-2} à f^{-4} bien adaptée pour objets astronomiques, scènes terrestres, ...
- ❑ La DSP peut être *estimée* à partir de l'image et de la FEP, par exemple par Maximum de Vraisemblance (peu de paramètres).

Restauration d'une image corrigée par OA, MAP sous hypothèse gaussienne



objet o

image $i = d * o + b$

image restaurée \hat{o}

Déconvolution d'image turbulente longue pose

❑ Données : 1 image LP corrigée (après recentrage de CPs) $\mathbf{i} = \mathbf{d} \star \mathbf{o} + \mathbf{b} + 1 \text{ FEP } \mathbf{d}$

❑ Règle de Bayes :

$$\underbrace{p(\mathbf{o}|\mathbf{i})}_{\text{loi } a \text{ posteriori}} = \frac{p(\mathbf{i}|\mathbf{o}) p(\mathbf{o})}{p(\mathbf{i})} \propto \underbrace{p(\mathbf{i}|\mathbf{o})}_{\text{modèle + loi du bruit}} \times \underbrace{p(\mathbf{o})}_{a \text{ priori sur } \mathbf{o}}$$

❑ Maximum *A Posteriori* (MAP) :

on cherche l'objet $\hat{\mathbf{o}}$ le plus probable sachant les données \mathbf{i}

❑ $p(\mathbf{i}|\mathbf{o})$: modèle d'instrument + statistique du bruit.

Exemple : $\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{i} - \mathbf{d} \star \mathbf{o}\|^2\right)$. Maximisation \leftrightarrow fidélité aux données

👉 modélisation fine du bruit (Poisson + Gauss en imagerie optique).

❑ $p(\mathbf{o})$: connaissances *a priori*

Exemple : $\mathbf{o} \geq 0$ (image), $\mathbf{o} = \sum \delta$ (champs d'étoiles), \mathbf{o} lisse avec ruptures, etc.

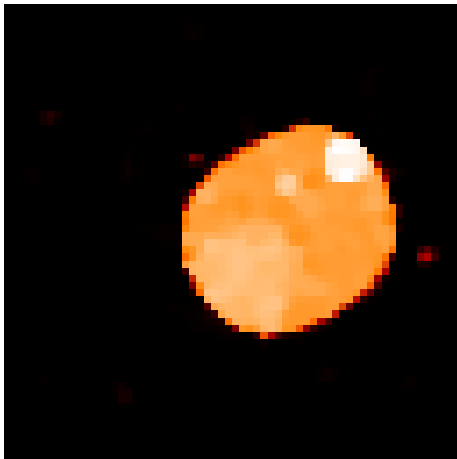
Maximisation \leftrightarrow fidélité à l'*a priori* \Rightarrow régularisation

👉 conception de régularisations adaptées (L_1 - L_2 , etc).

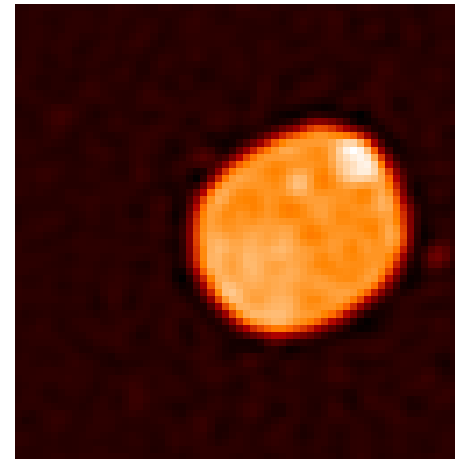
❑ Extension : FTO mal connue \Rightarrow déconvolution myope (code MISTRAL)

(FTO paramétrée par moyenne et variance à chaque fréquence)

Restauration des bords francs : régularisation linéaire-quadratique



Régularisation
Linéaire-Quadratique



Régularisation
Quadratique

Régularisation linéaire-quadratique → bonne restauration des bords francs

MISTRAL : déconvolution myope + positivité + L1-L2 imagerie par OA de Ganymede [sat. de Jupiter]

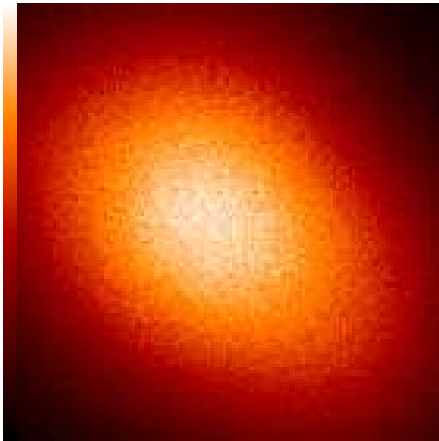


image non corrigée

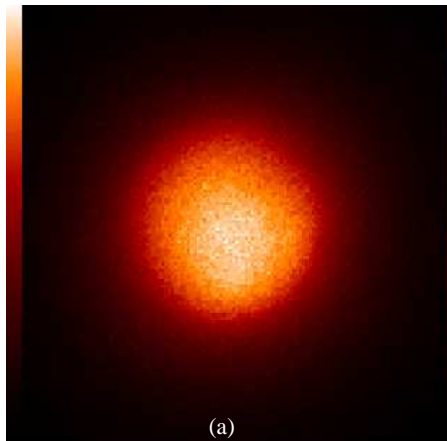
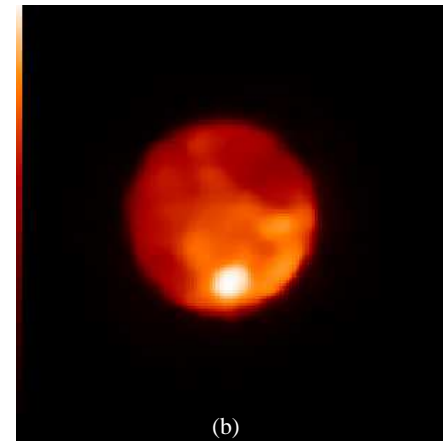


image corrigée par OA [1997/09/28]



déconvolution par MISTRAL

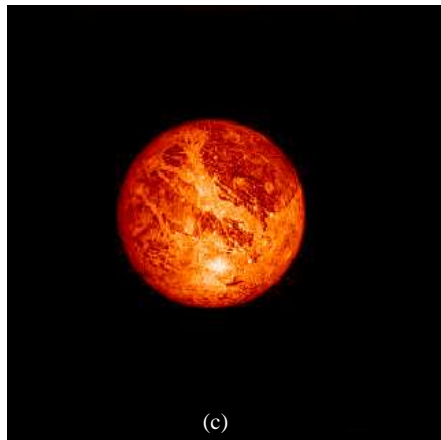


image synthétique (bdD NASA/JPL)

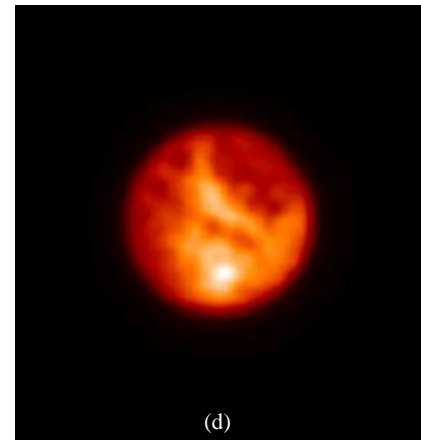
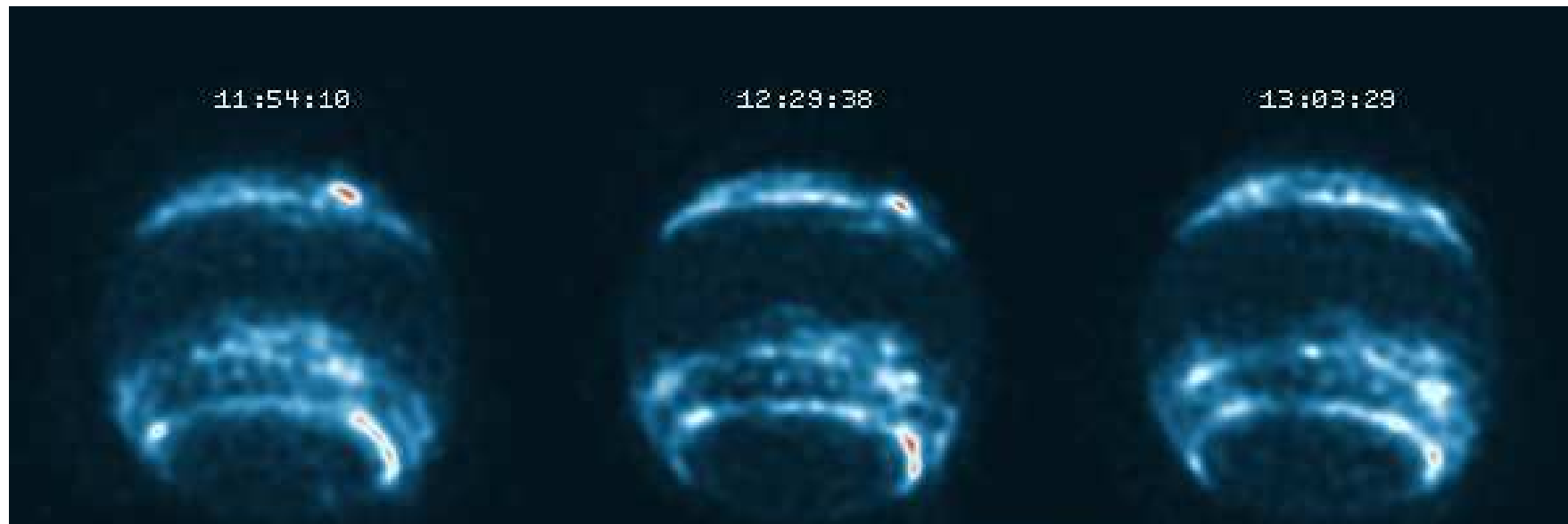


image synthétique + FEP télescope de 1,52 m

$\lambda = 0.85\mu\text{m}$, $C = 3.8\text{arcsec}$, $D/r_o \approx 23$, $S \approx 5\%$, $T = 100\text{ s}$, $\phi \approx 8.10^7\text{ph}$

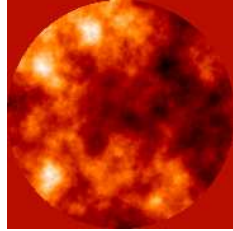
MISTRAL sur images du CFHT, Hawaii

Structure de l'atmosphère de Neptune



$\lambda = 1.72 \mu\text{m}$ (bande d'absorption du méthane)

Reconstruire et Déconvoluer



Phase mesurée par SH 12×12

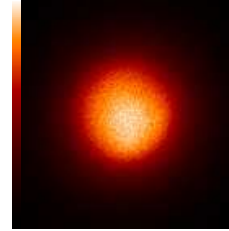


Image Ganymède

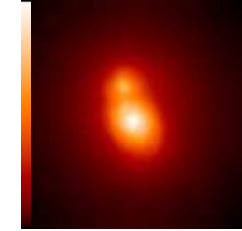
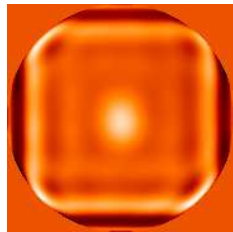


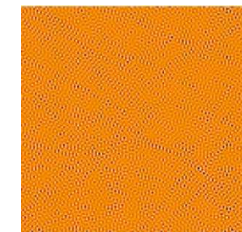
Image galaxie



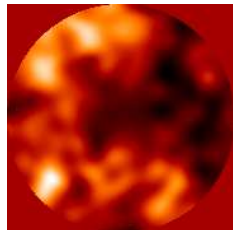
Sol. Moindres-Carrés (MC)



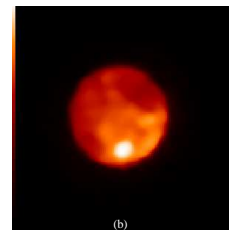
Richardson-Lucy



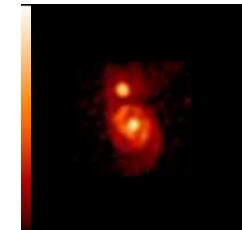
Filtre Inverse



Solution MAP



MAP



MAP

Importance des *a priori* pour reconstruction / déconvolution !